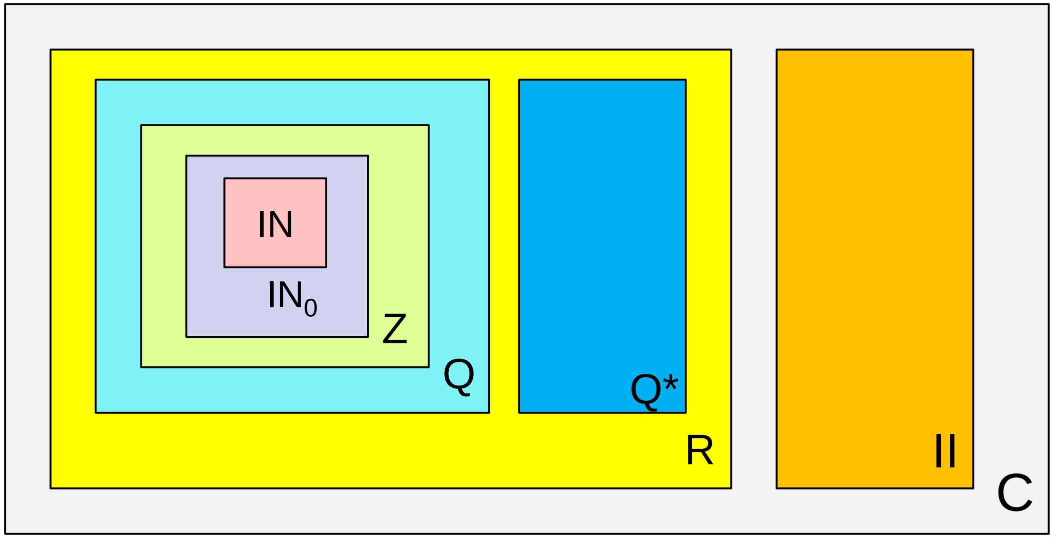
CLASE NÚMEROS COMPLEJOS

3° MEDIO

Conjuntos numéricos



$$IN \subset IN_0 \subset Z \subset Q \subset IR \subset C$$

Conjuntos Numéricos

- **Naturales:** $\mathbb{IN} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
- **Cardinales:** $\mathbb{IN}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
- **Enteros:** $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- **Racionales:** $Q = \left\{ \dfrac{a}{b} \ / \text{ a y b son enteros, y b es distinto de cero} \right\}$

Todo número entero es racional

$\mathbb{IN} \subset \mathbb{IN}_0 \subset Z \subset Q$

a: numerador y b: denominador

- **Irracionales:** $Q^* = \left\{ \ldots.. \pm\sqrt{3}, \ \pm\sqrt{2}, \ \pm\pi, \ \sqrt{\pi}, \ldots. \right\}$

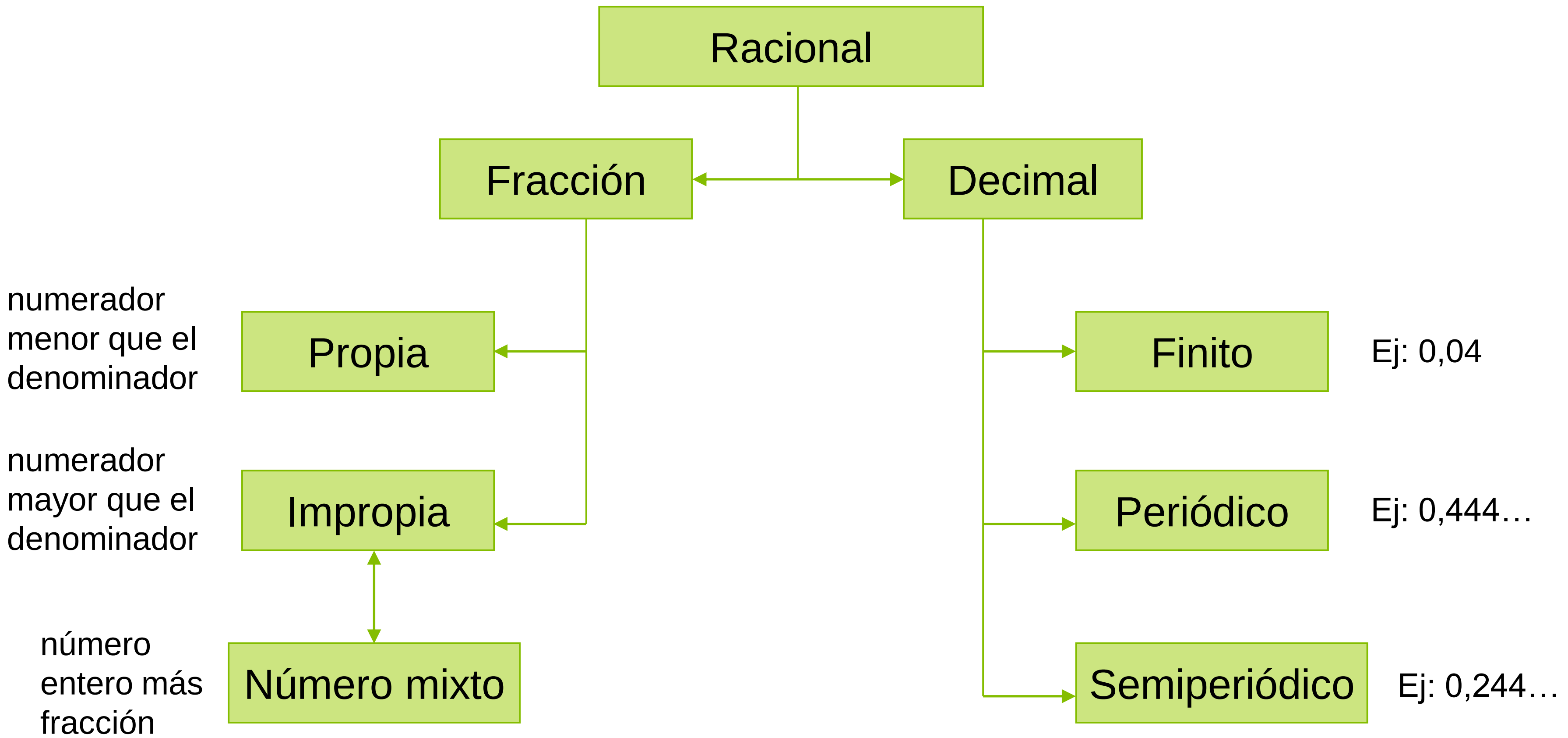
Son aquellos números que **NO** se pueden escribir como una fracción

$Q \cap Q^* = \varnothing$

$Q \cup Q^* = \mathbb{IR}$

Conjuntos Numéricos

Los números racionales pueden expresarse como fracciones o como números decimales:



Números imaginarios

Unidad imaginaria

Existen ciertos problemas que no tienen solución en los números reales. Por ejemplo, no es posible encontrar un número real que al elevarlo al cuadrado resulte – 1.

Para resolver este tipo de problemas fue necesario definir la **unidad imaginaria**, que corresponde a $\sqrt{-1}$ y se designa por la letra **i**.

Potencias de i:

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

En el exponente de **i**, cada cuatro números se repite el resultado para la potencia. Por lo cual, si el exponente es mayor que 4, se divide por 4 y se utiliza solo el resto como exponente.

Un **número imaginario** puede describirse como el producto entre un número real **b** (distinto de cero) y la unidad imaginaria **i**.

Números imaginarios

Ejemplo

Sea i la unidad imaginaria. ¿Cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s)?

I) $i^5 \bullet i^6 = i^2$

II) $i^2 \bullet (i^2 - i^3) = 1 - i$

III) $\dfrac{i^3 \bullet i^4 \bullet i^2}{i^5 \bullet i^{-2}} = 1$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Números imaginarios

Ejemplo

Sea $i^n = r \cdot i$, con n un número en el conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6} y r un número real. Se puede determinar el valor numérico de n, si se sabe que:

(1) n es un número primo.

(2) r es un número negativo

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

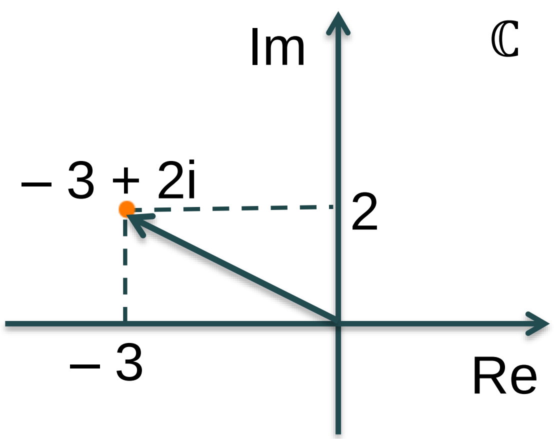
Números complejos

Definición

Un **número complejo** es de la forma **(a + bi)**, con **a** y **b** números reales e **i** la unidad imaginaria.

Un número complejo (a + bi) puede representarse como un punto (a, b) en el **plano complejo** (similar al plano cartesiano), donde el eje horizontal corresponde al **eje real (Re)** y el eje vertical corresponde al **eje imaginario (Im).**

Por ejemplo, en el plano complejo adjunto esta representado el numero – 3 + 2i, que corresponde al punto (– 3, 2).



Números complejos

Propiedades

Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces se define:

La parte real de z:

$$\mathrm{Re}(z) = a$$

La parte imaginaria de z:

$$\mathrm{Im}(z) = b$$

El inverso aditivo de z:

$$-z = -a - bi$$

El cuadrado de z:

$$z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$$

El módulo de z:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Números complejos

Propiedades

Si z = a + bi es un número complejo, entonces se define:

El conjugado de z:

$$\bar{z} = a - bi$$

Si z_1 y z_2 son números complejos, entonces:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Propiedades del conjugado:

$$z + \bar{z} = 2a$$

$$z - \bar{z} = 2bi$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

El inverso multiplicativo de z

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Ejemplo

El **conjugado** de un numero complejo z es (1 + 3i). ¿Cual de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) La parte real de z es – 1.

B) La parte imaginaria de z es 3.

C) El módulo de z es 10.

D) El inverso aditivo de z es (– 1 – 3i).

E) El inverso multiplicativo de z es $\left(\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i\right)$.

Números complejos

Ejemplo

Sea $z = (5, -6)$ un número en el plano complejo. El inverso multiplicativo de $\boldsymbol{z}$ es

A) $\left(\dfrac{5}{\sqrt{61}}, \dfrac{6}{\sqrt{61}}\right)$

B) $\left(\dfrac{5}{\sqrt{61}}, \dfrac{-6}{\sqrt{61}}\right)$

C) $\left(\dfrac{5}{61}, \dfrac{6}{61}\right)$

D) $\left(\dfrac{5}{11}, \dfrac{6}{11}\right)$

E) $\left(\dfrac{5}{11}, \dfrac{-6}{11}\right)$

Números Complejos

Operatoria

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ números complejos. Entonces:

$$k \cdot z_1 = k \cdot (a + bi) = k \cdot a + k \cdot bi \quad \text{(con k un número real)}$$

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)\cdot(c + di) = (a\cdot c - b\cdot d) + (a\cdot d + b\cdot c)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Pregunta oficial PSU

Si z_1, z_2 y z_3 son números complejos, con $z_1 = 2i$, $z_2 = 3 - i$ y $z_3 = 2 + 4i$, entonces $(z_1 + z_2 \cdot z_3)$ es igual a

A) $10 + 14i$

B) $10 + 12i$

C) $2 + 12i$

D) $10 + 2i$

E) $2 + 14i$

*Fuente : **DEMRE - U. DE CHILE**, Modelo Proceso de Admisión 2017.*

Números Complejos

Ejemplo

Si i es la unidad imaginaria, la expresión $\left(\dfrac{(-3i)^2 \cdot (1-2i)}{2+2i}\right)$ es igual a

A) $\dfrac{-9}{4} - \dfrac{27i}{4}$

B) $\dfrac{9}{4} + \dfrac{27i}{4}$

C) $\dfrac{27}{4} - \dfrac{9i}{4}$

D) $\dfrac{-27}{4} - \dfrac{9i}{4}$

E) $\dfrac{9}{4} - \dfrac{27i}{4}$

Números Complejos

Ejemplo

Si k es un número real, ¿para qué valor de k la parte real e imaginaria del número complejo $\dfrac{2+i}{k+i}$ son iguales?

A) – 3

B) 1

C) 2

D) – 1

E) 3

*Fuente : **DEMRE - U. DE CHILE**, Modelo Proceso de admisión 2016.*

RED EDUCACIONAL SANTO TOMÁS DE AQUINO DESDE 1870

LICEO JOSÉ DGO. CAÑAS 1897

CLASE NÚMEROS COMPLEJOS

3° MEDIO