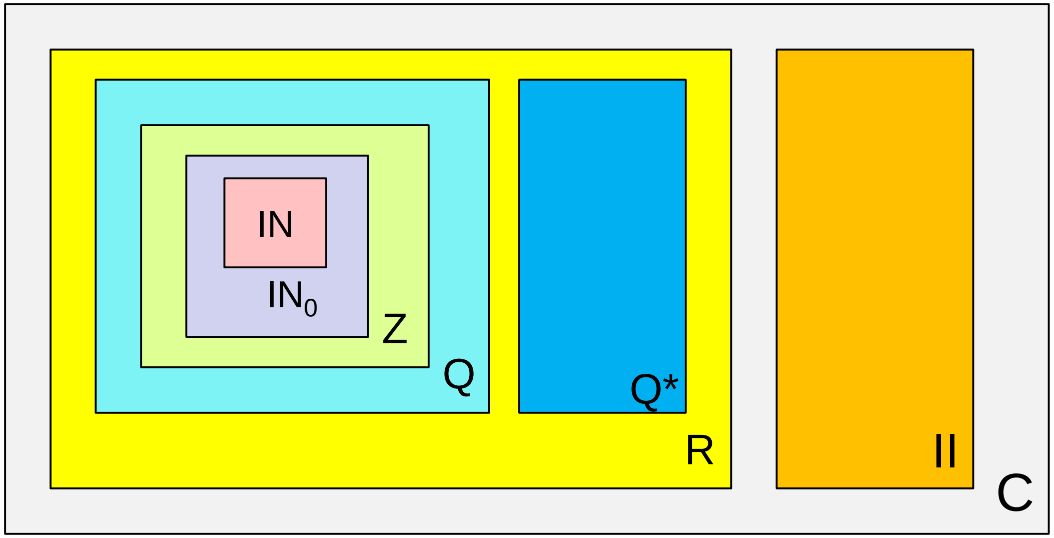
RED EDUCACIONAL SANTO TOMÁS DE AQUINO DESDE 1870

LICEO JOSÉ DGO. CAÑAS 1897

CLASE EJE NÚMEROS

4° MEDIO

1. Conjuntos numéricos



$$IN \subset IN_0 \subset Z \subset Q \subset IR \subset C$$

1. Conjuntos Numéricos

- **Naturales:** $IN = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
- **Cardinales:** $IN_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
- **Enteros:** $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- **Racionales:** $Q = \left\{ \frac{a}{b} \ / \text{ a y b son enteros, y b es distinto de cero} \right\}$

Todo número entero es racional

$IN \subset IN_0 \subset Z \subset Q$

a: numerador y b: denominador

- **Irracionales:** $Q^* = \left\{ \ldots.. \pm\sqrt{3},\ \pm\sqrt{2},\ \pm\pi,\ \sqrt{\pi}, \ldots. \right\}$

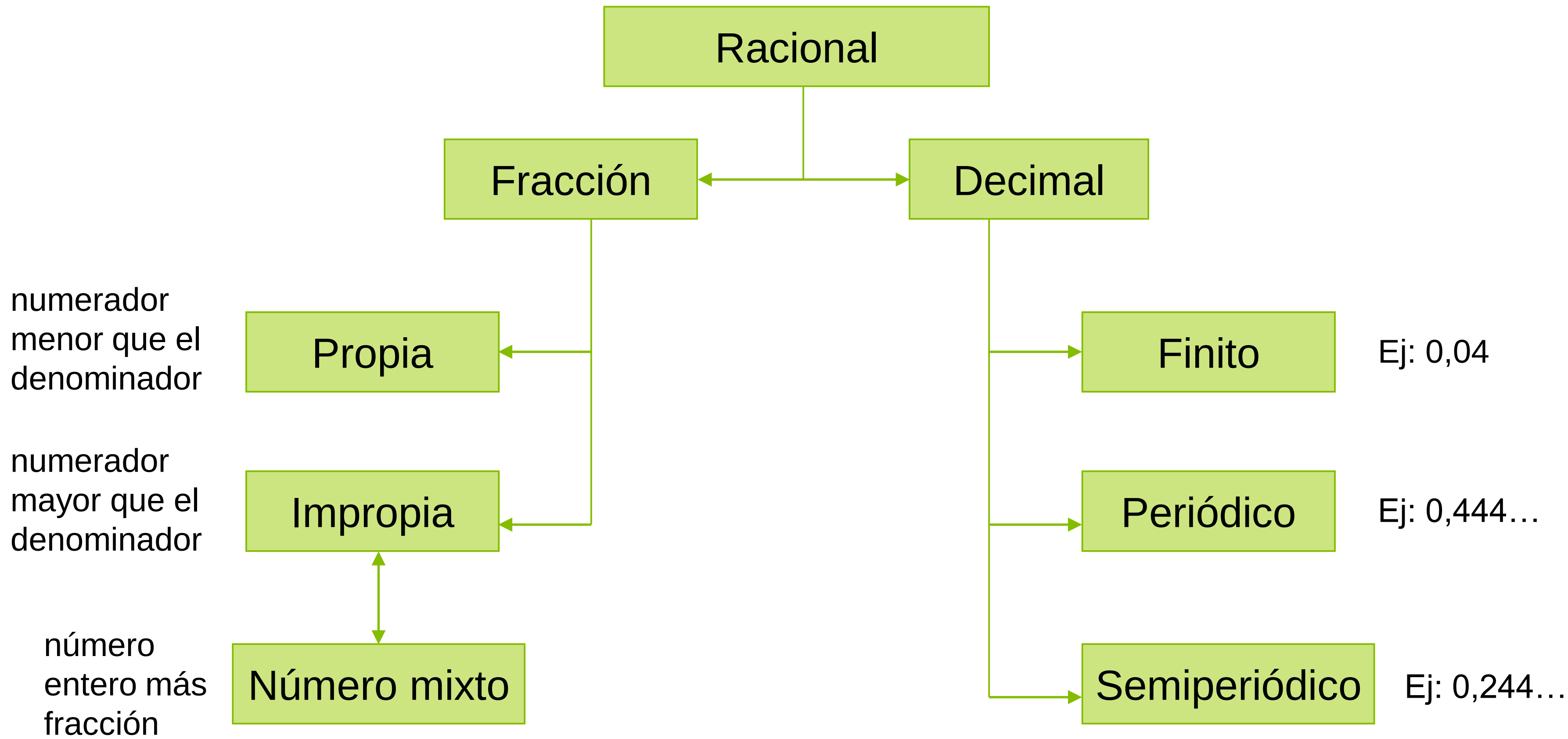
Son aquellos números que **NO** se pueden escribir como una fracción

$Q \cap Q^* = \varnothing$

$Q \cup Q^* = IR$

1. Conjuntos Numéricos

Los números racionales pueden expresarse como fracciones o como números decimales:



EJEMPLOS

1. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones representa(n) un número racional?

   I) $\frac{3}{-4}$

   II) 0

   III) $\frac{8}{0}$

   A) Sólo I
   B) Sólo II
   C) Sólo I y II
   D) Sólo I y III
   E) Todas ellas

2. Con respecto a la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, es **siempre** verdadero que

   A) $a = 3$ y $b = 2$
   B) $a = 2$ y $b = 3$
   C) $a = 4$ y $b = 6$
   D) $3a = 2b$
   E) $2a = 3b$

2. Definiciones

Consecutividad numérica

- **Sucesor**

Todo número entero tiene un sucesor, y se obtiene sumando 1 al número, es decir:

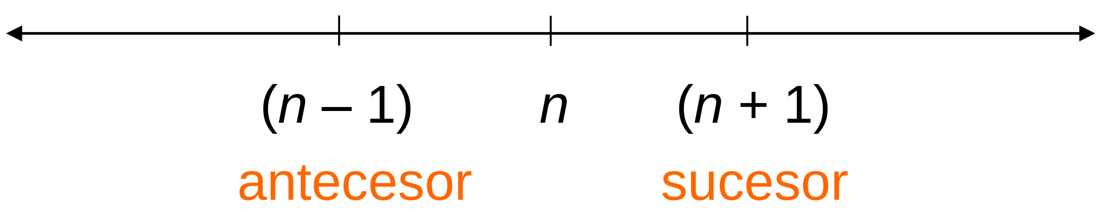
Si ***n*** pertenece a $\mathbb{Z}$, su sucesor será **(*n* + 1)**.

- **Antecesor**

Todo número entero tiene un antecesor y se obtiene al restar 1 al número, es decir:

Si ***n*** pertenece a $\mathbb{Z}$, su antecesor será **(*n* – 1)**.

Enteros consecutivos



EJEMPLOS

1. Si al triple del sucesor de -3 se le resta el antecesor de -2, se obtiene

A) -11
B) -9
C) -7
D) -4
E) -3

2. Si la suma de tres números impares consecutivos es 1.527, entonces el sucesor del número central es

A) 506
B) 507
C) 508
D) 509
E) 510

2. Definiciones

Paridad e imparidad

- **Números pares** {.., – 6, – 4, – 2, 0, 2, 4, 6,…}
- **Números impares** {.., – 5, – 3, – 1, 1, 3, 5,…}

Múltiplos

Los **múltiplos** de un número natural son aquellos que se obtienen al multiplicarlo por algún otro número natural.

Por ejemplo:

Múltiplos de 4: {4, 8, 12, 16, 20, …}

Múltiplos de 5: {5, 10, 15, 20, 25, …}

EJEMPLOS

1. El número 2.856 es el producto de tres factores. Si dos de los factores son 12 y 14, ¿cuál es el otro factor?

   A) 17
   B) 16
   C) 15
   D) 13
   E) Ninguna de las anteriores

2. ¿De cuáles de los siguientes números, 105 es múltiplo?

   I) 15
   II) 21
   III) 35

   A) Sólo I y II
   B) Sólo I y III
   C) Sólo II y III
   D) I, II y III
   E) Ninguno de ellos

2. Definiciones

Divisores

Los **divisores** de un número natural son aquellos números naturales que lo dividen exactamente (división con resto cero).

Por ejemplo:

Divisores de 24: {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

Divisores de 36: {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}

Números primos

Son aquellos números naturales que solo son divisibles por **1** y por **sí mismos** (solo tienen 2 divisores distintos).

{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,…}.

El 1 **NO** es primo, pues tiene un solo divisor.

1. ¿Cuál(es) de los siguientes números es(son) primo(s)?

I) 51
II) 91
III) 141

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) I, II y III
E) Ninguno de ellos

2. Al expresar los números 60 y 90 en factores primos se obtiene, respectivamente,

A) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $2 \cdot 3^2 \cdot 5$
B) $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $2 \cdot 3^2 \cdot 5$
C) $2 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $2 \cdot 3^2 \cdot 5$
D) $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $2^2 \cdot 3 \cdot 5$
E) $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ y $2 \cdot 3^2 \cdot 5$

2. Definiciones

Mínimo común múltiplo (m.c.m.)

El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos o más números naturales, corresponde al menor de los múltiplos que tienen en común.

El m.c.m. entre 3, 6 y 15 se puede obtener a través del siguiente método:

Se divide cada número por números primos hasta que en cada columna quede 1. El producto de ellos corresponde al m.c.m. entre 3, 6 y 15.

$$\begin{array}{ccc|c}
3 & 6 & 15 & 3 \\ \hline
1 & 2 & 5 & 2 \\
 & 1 & 5 & 5 \\
 & & 1 &
\end{array}$$

m.c.m. = 3 · 2 · 5 = 30

2. Definiciones

Máximo común divisor (M.C.D.)

El máximo común divisor de dos o más números, corresponde al mayor de los divisores que tienen en común.

El M.C.D. entre 36, 18 y 24 se puede obtener a través del siguiente método:

Se divide por números primos que sean divisores de cada número, hasta que ya no se pueda dividir a todos en forma simultánea. La multiplicación de estos primos es el M.C.D.

$$\begin{array}{ccc|c} 36 & 18 & 24 & 2 \\ \hline 18 & 9 & 12 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & \end{array}$$

M.C.D. $= 2 \cdot 3 =$ **6**

3. Orden

Comparación de fracciones

Igualar denominadores

Se amplifican las fracciones hasta igualar denominadores. Luego se comparan los numeradores.

Ejemplo:

Al comparar $\frac{13}{15}$ y $\frac{7}{12}$

$$\frac{13 \cdot 4}{15 \cdot 4} \quad y \quad \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 5}$$

$$\frac{52}{60} \quad y \quad \frac{35}{60}$$

Como $52 > 35$, $\frac{13}{15} > \frac{7}{12}$

Multiplicación cruzada

Se multiplican cruzados numeradores y denominadores, y luego se comparan estos productos.

Ejemplo:

Al comparar $\frac{13}{15}$ y $\frac{7}{12}$

$$13 \cdot 12 \quad y \quad 15 \cdot 7$$

$$156 \quad y \quad 105$$

Como $156 > 105$, $\frac{13}{15} > \frac{7}{12}$

EJEMPLOS

1. El orden creciente de los números: $a = \frac{12}{5}$, $b = \frac{12}{9}$, $c = \frac{12}{7}$ es

A) a, b, c
B) b, c, a
C) c, b, a
D) a, c, b
E) c, a, b

2. El orden decreciente de los números $w = \frac{12}{3}$, $x = \frac{5}{3}$, $z = \frac{7}{3}$ es

A) w, x, z
B) x, z, w
C) w, z, x
D) x, w, z
E) z, w, x

3. El orden creciente de los números $a = \frac{7}{8}$, $b = \frac{11}{12}$, $c = \frac{9}{10}$ es

A) a, b, c
B) b, a, c
C) c, a, b
D) a, c, b
E) b, c, a

4. Transformaciones

- **De número mixto a fracción impropia**

Se debe multiplicar el número entero por el denominador, luego a este producto se le suma el numerador. Este resultado pasa a ser el nuevo numerador y el denominador se mantiene.

Ejemplo:

$$8\frac{3}{5} = \frac{8 \cdot 5 + 3}{5} = \frac{43}{5}$$

- **De fracción a decimal**

Se debe dividir el numerador por el denominador.

Ejemplo:

$$\frac{7}{4} = 1{,}75$$

1. El desarrollo decimal de la fracción $\frac{5}{6}$ es

A) $0,8\overline{03}$
B) $0,833$
C) $0,83$
D) $0,8\overline{3}$
E) $0,\overline{83}$

2. $(0,75 - 0,3) \cdot 5 =$

A) 0,25
B) 0,45
C) 2,25
D) 3,60
E) 5,25

4. Transformaciones

- **De decimal finito a fracción**

El numerador, de la nueva fracción, corresponde al decimal pero sin coma. El denominador es una potencia de 10 con tantos ceros como decimales tuviera el racional a transformar.

Ejemplo: $$1{,}75 = \frac{175}{100} = \frac{25\cdot 7}{25\cdot 4} = \frac{7}{4}$$

- **De decimal periódico a fracción**

1. El numerador de la fracción es la diferencia entre el número decimal completo, sin la coma, y la parte entera.
2. El denominador está formado por tantos nueves (9), como cifras tenga el período.

Ejemplos: $$2{,}\overline{35} = \frac{235-2}{99} = \frac{233}{99}$$

Se llama **período** al conjunto de dígitos que se repite indefinidamente.

4. Transformaciones

- **De decimal semiperiódico a fracción**

1. El numerador de la fracción corresponde a la diferencia entre el número decimal completo, sin la coma; y la parte entera incluyendo las cifras del anteperiodo.
2. El denominador queda formado por tantos nueves (9), como cifras tenga el período, y tantos ceros (0), como cifras tenga el anteperiodo.

Ejemplo:

$$3,2\overline{14} = \frac{3.214 - 32}{990} = \frac{3.182}{990}$$

Se llama ***anteperiodo*** a los números que hay entre la coma decimal y el período.

EJEMPLOS

1. $0,\overline{6} - 0,\overline{45} =$

A) $0,\overline{15}$
B) $0,1\overline{5}$
C) $0,1\overline{6}$
D) $0,2\overline{1}$
E) $0,\overline{21}$

2. $(1,555... - 0,222...)^2 =$

A) $1,\overline{27}$
B) $1,\overline{3}$
C) $1,\overline{7}$
D) $2,\overline{6}$
E) $2,\overline{8}$

3. Al ordenar en forma creciente los números $x = 0{,}03\overline{5}$, $y = 0{,}0\overline{35}$, $z = 0{,}\overline{035}$ $w = 0{,}035$, se obtiene

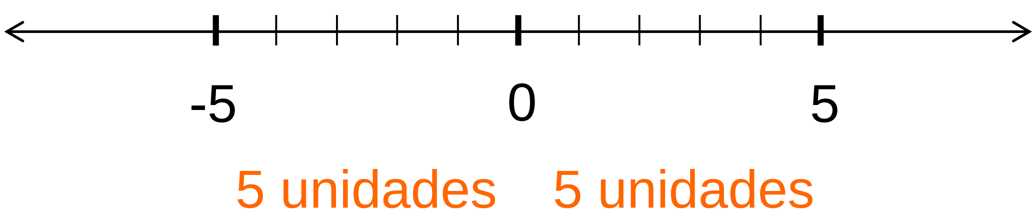
A) x, w, y, z
B) x, y, z, w
C) w, z, x, y
D) w, z, y, x
E) w, x, y, z

5. Propiedades

Valor absoluto

El valor absoluto de un número representa la distancia del número al cero en la recta numérica.

Por ejemplo, la distancia del 5 al origen es cinco unidades, igual que la distancia del (– 5) al origen. La notación es: $|5| = 5$ y $|-5| = 5$



Ejemplo:

$|-20| = 20$ $|34| = 34$ $|-12| = 12$

EJEMPLOS

1. Si $a = -5$, entonces $a + |a| - |-a| =$

   A) 10
   B) 5
   C) -5
   D) -10
   E) -15

2. $-3 \cdot |2 - 4| - |-2| =$

   A) -8
   B) -4
   C) 0
   D) 4
   E) 8

3. Si $a > b$, entonces $|b - a| =$

A) 0
B) $b - a$
C) $a - b$
D) $-a - b$
E) $a + b$

6. Operatoria en Z

6.1 Reglas para operar en Z

Al realizar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones en los enteros debemos considerar algunas reglas para poder operar correctamente:

a) Al sumar dos enteros de igual signo, se suman los módulos de los números y se mantiene el signo.

Ejemplos:

$$25 + 8 = +\ 33$$

$$-5 + -9 = -\ 14$$

b) Al sumar dos enteros de distinto signo, se calcula la diferencia entre los módulos de los números y se mantiene el signo del número que tiene módulo mayor.

Ejemplos:

$$-10 + 7 = -\ 3$$

$$75 + -9 = +\ 66$$

6. Operatoria en Z

6.1 Reglas para operar en Z

c) Al restar dos enteros, se debe sumar al minuendo el inverso aditivo del sustraendo.

$$\boxed{a - b = a + - b}$$

Ejemplo:

$$5 - 9 = 5 + - 9 = - 4$$

$$\boxed{a - (- b) = a + b}$$

Ejemplo:

$$12 - (- 8) = 12 + 8 = 20$$

d) Al multiplicar o dividir dos enteros de igual signo, se multiplican (dividen) los módulos y el resultado es positivo.

Ejemplos:

$$- 42 \cdot - 8 = + 336$$

$$- 28 : - 7 = + 4$$

6. Operatoria en Z

6.1 Reglas para operar en Z

e) Al multiplicar o dividir dos enteros de distinto signo, se multiplican (dividen) los módulos y el resultado es negativo.

Ejemplos:

$$37 \cdot -5 = -185$$

$$125 : -5 = -25$$

EJEMPLOS

1. $-2 + (-107) =$

A) -109
B) -105
C) 105
D) 109
E) 214

2. $(-3) \cdot 3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot 3 =$

A) -243
B) -81
C) -3
D) 81
E) 243

6. Operatoria en Z

2.2 Prioridad de las operaciones

Para los ejercicios combinados, existe un orden que debemos respetar al realizar las operaciones, para obtener el resultado correcto. Este orden es:

1° Paréntesis

2° Potencias

3° Multiplicación y/o división (de izquierda a derecha)

4° Adiciones y sustracciones

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
-5 + 15 : 3 - 3 &= -5 + 5 - 3 \\
&= 0 - 3 \\
&= -3
\end{aligned}
$$

EJEMPLOS

1. $-8 + 4 \cdot 3 + 12 : -6 =$

   A) 2
   B) 0
   C) -12
   D) -14
   E) -18

2. $42 - 2^5 : 2 \cdot 5 =$

   A) -38
   B) -1
   C) 1
   D) 25
   E) 38

3. $3 - \{2 - [1 - (12 : 4 \cdot 3)] - 3^2\} =$

A) -16
B) 2
C) 4
D) 10
E) 18

6. Operatoria en Q

6.1 Amplificación y simplificación

- **Amplificación**

Amplificar una fracción significa multiplicar, tanto el numerador como el denominador, por un mismo número.

Ejemplo:

Al amplificar la fracción $\frac{2}{3}$ por 6 resulta:

$$\frac{2\cdot}{3\cdot}\frac{6}{6} = \frac{12}{18}$$

Al amplificar una fracción formamos una **fracción equivalente** a la original, es decir, representa la misma cantidad.

6. Operatoria en Q

6.1 Amplificación y simplificación

- **Simplificación**

Simplificar una fracción significa dividir, tanto el numerador como el denominador, por un mismo número. Las fracciones que no se pueden simplificar se llaman **fracciones irreductibles.**

Ejemplo:

Al simplificar la fracción $\frac{27}{45}$ por 3 resulta:

$$\frac{27 : 3}{45 : 3} = \frac{9}{15}$$

Al simplificar una fracción formamos una **fracción equivalente** a la original, es decir, representa la misma cantidad.

6. Operatoria en Q

6.2 Operaciones en Q

- **Adición y sustracción**

Existen distintas maneras de sumar y/o restar fracciones. Las ejemplificaremos:

1. Si los denominadores son iguales:

$$\frac{4}{15} + \frac{7}{15} = \frac{11}{15} \quad \text{y} \quad \frac{4}{15} - \frac{7}{15} = \frac{-3}{15}$$

2. Si uno de los denominadores es múltiplo del otro:

$$\frac{2}{15} + \frac{7}{45} = \frac{2\cdot 3 + 7\cdot 1}{45} = \frac{6+7}{45} = \frac{13}{45}$$

6. Operatoria en Q

6.2 Operaciones en Q

- **Adición y sustracción**

Existen distintas maneras de sumar y/o restar fracciones. Las ejemplificaremos:

3. Si los denominadores son primos entre si:

$$\frac{4}{5} + \frac{7}{8} = \frac{4\cdot 8 \; + \; 5\cdot 7}{40} = \frac{32 \; + \; 35}{40} = \frac{67}{40}$$

4. Aplicando mínimo común múltiplo (m.c.m.):

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{18} = \frac{5\cdot 3 \; + \; 7\cdot 2}{36} = \frac{15 \; + \; 14}{36} = \frac{29}{36}$$

En este conjunto, para la adición se cumplen las mismas propiedades que en Z.

EJEMPLOS

1. $2 + \frac{5}{6} + 3 =$

A) $5\frac{5}{6}$

B) $\frac{10}{6}$

C) $\frac{30}{6}$

D) $1\frac{1}{6}$

E) $\frac{25}{6}$

2. Si $T = -2\frac{1}{2}$ y $S = -4\frac{3}{4}$, entonces $S - T =$

A) $-7\frac{1}{4}$

B) $-2\frac{1}{4}$

C) $-1\frac{1}{4}$

D) $2\frac{1}{4}$

E) $7\frac{1}{4}$

6. Operatoria en Q

6.2 Operaciones en Q

- **Multiplicación**

Se multiplican numeradores y denominadores entre sí. Los productos pasan a ser el nuevo numerador y el nuevo denominador.

Ejemplo:

$$\frac{-4}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{-28}{40} = -\frac{28}{40}$$

<u>Propiedades</u>

Para la multiplicación se cumplen las mismas propiedades que en Z, solo se agrega la siguiente:

Elemento inverso multiplicativo o recíproco: Todo número racional, distinto de cero, posee un elemento recíproco, que cumpla

$$a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$$

Ejemplo:

El inverso multiplicativo o recíproco de $\frac{2}{9}$ es $\frac{9}{2}$

3. Operatoria en Q

6.2 Operaciones en Q

- **División**

Se multiplica el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

Ejemplo:

$$\frac{-4}{5} : \frac{7}{8} = \frac{-4}{5} \cdot \frac{8}{7} = \frac{-32}{35} = -\frac{32}{35}$$

Antes de multiplicar las fracciones conviene simplificar lo más posible.

EJEMPLOS

1. $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] : \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right] =$

A) -1

B) $-\frac{4}{5}$

C) $-\frac{1}{36}$

D) $\frac{4}{5}$

E) 1

2. El inverso multiplicativo de $\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4} : \frac{5}{6}\right]$ es

A) $-\frac{10}{3}$

B) $-\frac{5}{2}$

C) $-\frac{3}{10}$

D) $\frac{3}{10}$

E) $\frac{2}{5}$