RED EDUCACIONAL SANTO TOMÁS DE AQUINO DESDE 1870

Nombre: ____

Curso: ____

Colegio: ____

FUNCION:

Sean A y B conjuntos no vacíos. Una función de A en B es una relación que asigna a cada elemento x del conjunto A uno y sólo un elemento y del conjunto B.

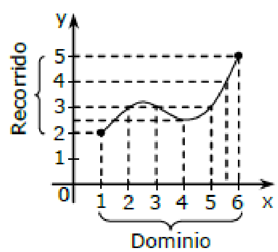
Se expresa como:

$$f: A \rightarrow B$$
$$x \rightarrow y$$

y se lee "f es una función de A en B".

Ejemplo:

x	y
1	2
2	3
3	3
4	2,5
5	3
5,5	4
6	5



Se dice que y es la imagen de x mediante f lo cual se denota y = f(x), y que x es pre imagen de y.

Dominio de una función: es el conjunto formado por todas las pre-imágenes (x) y se denota Df.

Recorrido de una función: es el conjunto formado por todas las imágenes (y) y se denota Rf.

OBSERVACIÓN: y se denomina variable dependiente y x se denomina variable independiente.

Tipos de función:

a) Función Inyectiva: Una inyección de A en B es toda función f de A en B, de modo que a elementos distintos del dominio A le corresponden imágenes distintas en el codominio B.
b) Función Epiyectiva: Una epiyección o sobreyección de A en B es toda función f de A en B, de modo que todo elemento del codominio B es imagen de al menos un elemento del dominio A.
c) Función Biyectiva: Una función f es biyectiva de A en B sii la función f es tanto inyectiva como epiyectiva.

Composición de Funciones
Sean f y g dos funciones tales que:

$f : A \dashrightarrow B$ y $g : B \dashrightarrow D$

Entonces se define g compuesta con f como una función definida de A a D

$gof : A \dashrightarrow D$

Observación : $(gof)(x) = g(f(x))$

Función Inversa

Nota: Sólo las funciones biyectivas tienen inversa $f^{-1}(x)$ que también es función.

f^{-1} es la función inversa de f sii $\forall (a,b) \in f \rightarrow (b,a) \in f^{-1}$

Propiedades:

(1) $f^{-1}(f(a)) = (f^{-1} \circ f)(a) = a$

(2) $f(f^{-1}(b)) = (f \circ f^{-1})(b) = b$

EVALUACIÓN DE UNA FUNCIÓN
Para encontrar las imágenes de una función, se reemplaza la variable independiente en la fórmula que define la función, por el número o expresión que corresponda, colocándola entre paréntesis.

Función Creciente: Es aquella que al aumentar la variable independiente, también aumenta la variable dependiente.

Función Decreciente: Es aquella que al aumentar la variable independiente, la variable dependiente disminuye.
Función Constante: Es aquella que para todos los valores de la variable independiente, la variable dependiente toma un único valor.

FUNCIONES PARES
Son aquellas que al sustituir la variable independiente por dos valores opuestos, resultan valores iguales.

$$\boxed{f(x)= f(-x)}$$

FUNCIONES IMPARES
Son aquellas que al sustituir la variable independiente por dos valores opuestos, resultan valores opuestos.

$$\boxed{f(x) = - f(-x)}$$

OBSERVACIÓN: Las funciones pare tienen una gráfica que es simétrica respecto al eje de las ordenadas, mientras que las funciones impares tienen gráficas respecto del origen.

TRASLACIÓN DE FUNCIONES
Sea y = f(x) una función.

- La función y = f(x) + k es la función f desplazada k unidades en el eje y. Si k > 0 el desplazamiento es en el sentido positivo del eje y, y si k < 0 el desplazamiento es en el sentido negativo (fig. 1 y 2).
- La función y = f(x – h) es la función f trasladada h unidades en el eje x. Si h > 0 el desplazamiento es en el sentido positivo del eje x, y si h < 0 es en el sentido negativo (fig. 3 y 4).
- La función y = f(x – h) + k es la función f desplazada k unidades en el eje y, y h unidades en el eje x.

Si h y k son positivos, entonces:

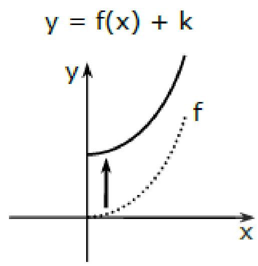


fig. 1

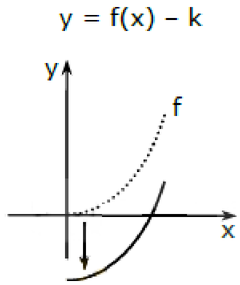


fig. 2

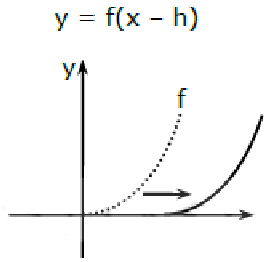


fig. 3

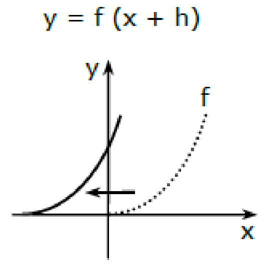
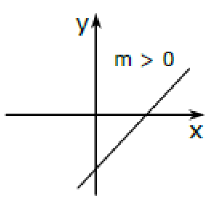


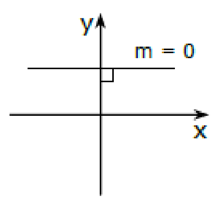
fig. 4

Tipos de Funciones:

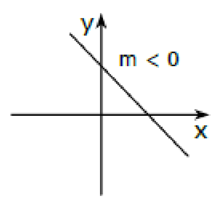
FUNCIÓN AFIN
Se denomina **Función Afín** a la función definida por f(x) = mx + n, con **m** y **n** números reales.
Su representación gráfica es una recta, su pendiente **m** determina si la función afín es creciente, constante o decreciente.



creciente



constante



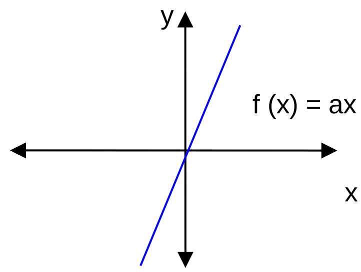
decreciente

En el caso que el coeficiente de posición n sea igual a cero, la función se denomina **lineal**. Esta función pasa por el origen.

RED EDUCACIONAL SANTO TOMÁS DE AQUINO DESDE 1870

FUNCION LINEAL:

· Función de primer grado f (x) = ax + b, con b = 0:



$f(x) = ax$, con $a \neq 0$

· La recta pasa por el origen.

La función lineal $f(x) = mx$, cumple las siguientes propiedades:

- Para todo **a** y **b** pertenecientes al D_f se cumple que

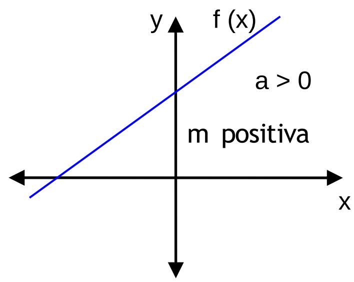
  $f(a + b) = f(a) + f(b)$

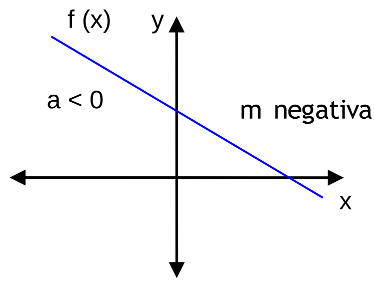
- Para todo a perteneciente al D_f y $\propto \in$ lR se cumple que

  $f(\propto \cdot a) = \propto f(a)$

FUNCION DE PRIMER GRADO

· $f(x) = ax + b$

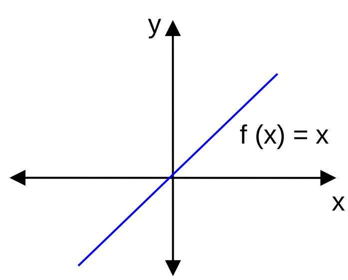




FUNCION IDENTIDAD

· Función lineal $f(x) = ax$, con $a = 1$:

$f(x) = x$



· La recta pasa por el origen.

· Existe una proporcionalidad directa entre x e y.

FUNCION VALOR ABSOLUTO

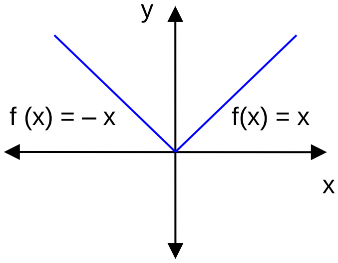
El valor absoluto de un número real **x**, denotado por **|x|**, es siempre un número real **no negativo**.

Asigna a cada número real x, un número no-negativo:

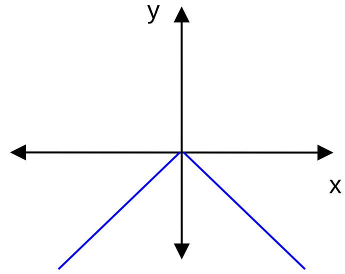
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \ , \text{ si } x \geq 0 \\ -x \ , \text{ si } x < 0 \end{cases} \quad , x \in \mathbb{R}$$

Representación Grafica

f(x)=|x|



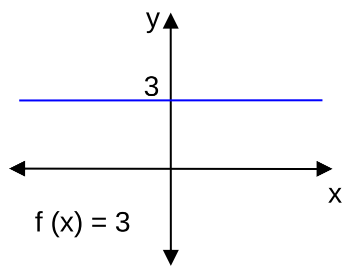
f(x)=-|x|



OBSERVACIÓN:
$|x|=\sqrt{x^2}$

FUNCION CONSTANTE

· Función de grado cero.
· Su gráfico es una recta horizontal.



FUNCION PARTE ENTERA

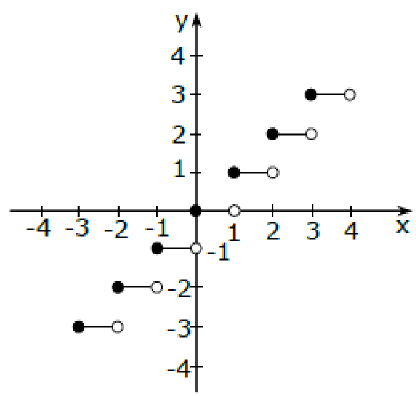
$\boxed{f\,(x)=[x] \text{ con } x \in \mathbb{R}}$

Dado un número real **x**, la función **parte entera** le asigna el **mayor entero** que es **menor** o **igual** a **x**.

Su representación gráfica es

f(x) = [x]

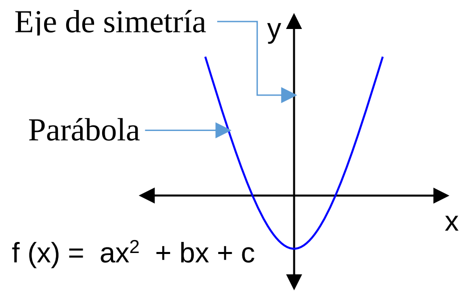
x	f(x)
-1,7	-2
-1	-1
-0,3	-1
0	0
0,5	0
1	1
1,6	1
2	2
2,3	2



A la gráfica de esta función se le llama **"función escalonada".**

FUNCION CUADRATICA
Función de segundo grado
$f(x) = ax^2 + bx + c$, siendo a, b, c $\in$ lR y $a \neq 0$

La representación gráfica de una función cuadrática es una **parábola**, simétrica con respecto a una recta paralela al eje de las ordenadas. Dicha recta recibe el nombre de **eje de simetría**.



Concavidad: Es la abertura que tiene la parábola.

Si $a > 0$, la parábola tiene sus ramas hacia arriba.

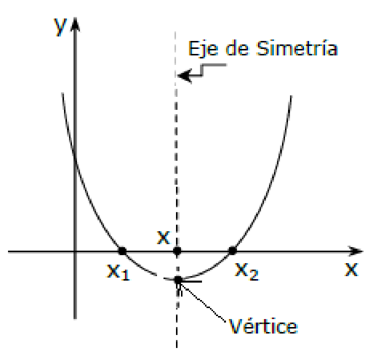
Si $a < 0$, la parábola tiene sus ramas hacia abajo.

EJE DE SIMETRÍA
El eje de simetría de una parábola es una recta que divide a esta curva en dos "ramas" congruentes.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{-b}{2a}$$

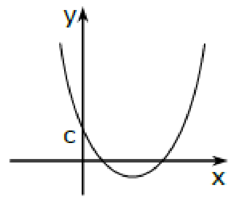
VÉRTICE DE LA PARÁBOLA
El vértice de la parábola es el punto de intersección de ésta con su eje de simetría.

$$v = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$



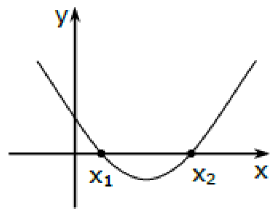
INTERSECCIÓN CON EL EJE Y

La parábola asociada a la función y = ax2 + bx + c siempre intersecta al eje de las ordenadas en y = c.



CEROS DE LA FUNCIÓN

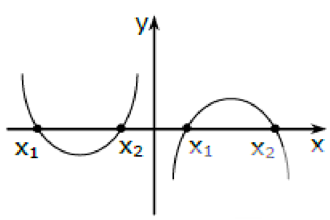
Los **ceros** (o raíces) de la función cuadrática son los valores x_1 y x_2 para los cuales $y = 0$



DISCRIMINANTE (Δ)

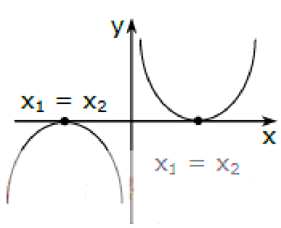
La expresión $\mathbf{b^2 - 4ac}$ se denomina **discriminante**, pues determina la naturaleza de las raíces de la ecuación cuadrática asociada a la función $y = ax^2 + bx + c$.

Si $\boxed{b^2 - 4ac > 0}$



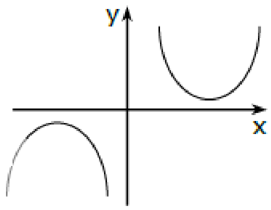
La parábola intersecta al eje x en dos puntos, por lo tanto tiene 2 soluciones (raíces reales distintas).

Si $\boxed{b^2 - 4ac = 0}$



La parábola es tangente al eje x, por lo tanto tiene sus soluciones idénticas (una única solución real).

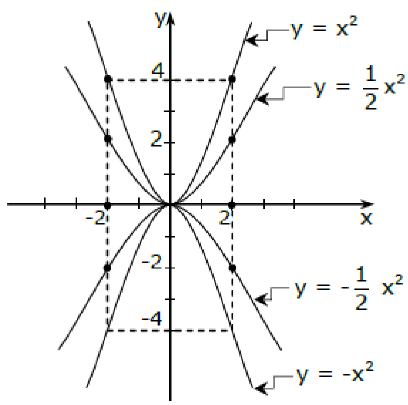
Si $\boxed{b^2 - 4ac < 0}$



La parábola **no** intersecta al eje x, no tiene solución real.

FUNCIONES DE LA FORMA y=ax²

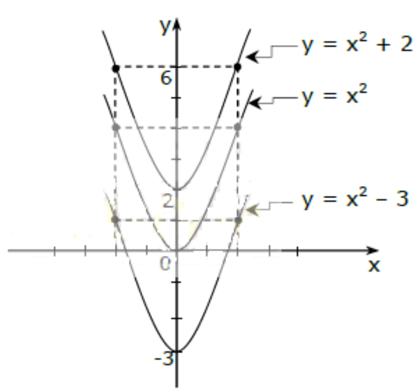
La figura muestra las gráficas de $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -x^2$ e $y = -\frac{1}{2}x^2$



Si $|a| > 1$, la gráfica de $y = ax^2$ es más "angosta" que la gráfica de $y = x^2$.
Si $0<|a|<1$, la gráfica de $y = ax^2$ es más "ancha" que la gráfica de $y = x^2$.

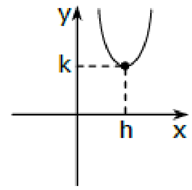
FUNCIONES DE LA FORMA y=ax²+c

La figura, muestra las gráficas de $y = x^2$, $y = x^2 + 2$ e $y = x^2 - 3$.



Si $c > 0$, la parábola se desplaza c unidades hacia arriba con respecto al origen.
Si $c < 0$, la parábola se desplaza c unidades hacia abajo con respecto al origen.

FUNCIONES DE LA FORMA $y=(x-h)^2+k$



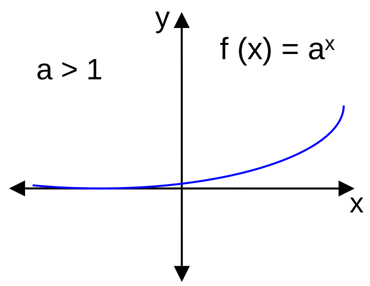
La parábola se traslada h unidades en el eje x (sentido opuesto) y k unidades en el eje y.
(h, k) corresponde a las coordenadas del vértice de la parábola.

FUNCION EXPONENCIAL

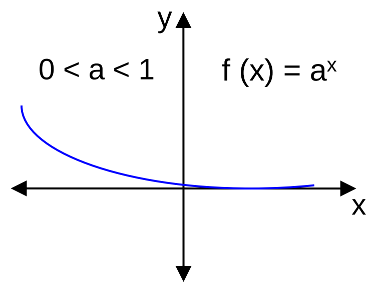
La función f está definida por $f(x) = a^x$, con a perteneciente a IR^+ y $a \neq 1$.
· Existen dos casos: $a > 1$ y $0 < a < 1$

Propiedades
El Dominio es: Df = lR
El Recorrido es: Rf = lR+
La gráfica intercepta al eje de las ordenadas en el punto (0, 1).
Si $a > 1$, entonces $f(x) = a^x$ es creciente.
Si $0 < a < 1$, entonces $f(x) = a^x$ es decreciente.
La gráfica no corta al eje de las abscisas, por lo que la curva es asintótica (se acerca sin tocar) al eje x (1º y 4º cuadrante)

PRIMER CASO: $a > 1$
· La función es creciente



SEGUNDO CASO: $0 < a < 1$
· La función es decreciente



FUNCION RAIZ CUADRADA:

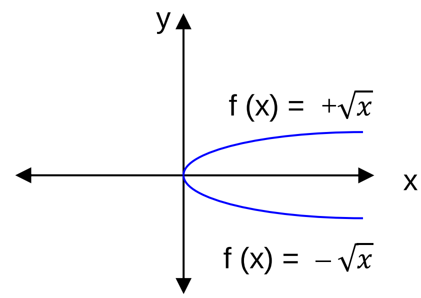
Si **x** es un número real no negativo, se define la función raíz cuadrada de **x** por f(x) = $\pm \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$

· Su dominio son los IR^{+} U {0}.

□ El recorrido es: Rf = IR^{+} U {0}..

□ La función es creciente.

□ La función raíz cuadrada es considerada como un modelo de crecimiento lento.



FUNCION LOGARITMICA:

Es una función del tipo f(x) = log $_a$ (x) = x , con a perteneciente a IR^{+} y b ≠ 1 y x>0.

Es la función inversa a la función exponencial.

Existen dos casos: a > 1 y 0 < a < 1

El dominio es: Df = lR+

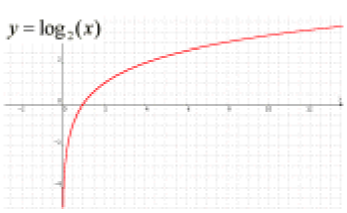
El recorrido es: Rf = lR

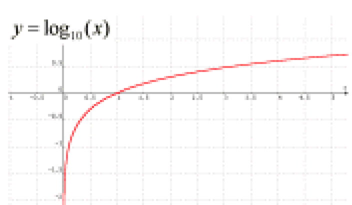
La gráfica intersecta al eje x en el punto (1, 0).

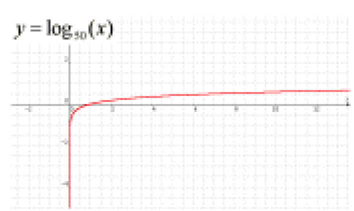
La curva es asintótica al eje y (1º y 2º cuadrante)

PRIMER CASO: a > 1

La función es creciente

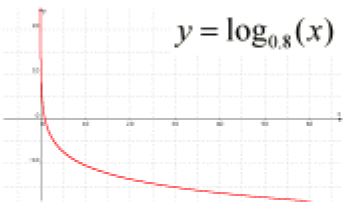


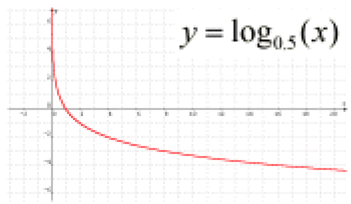


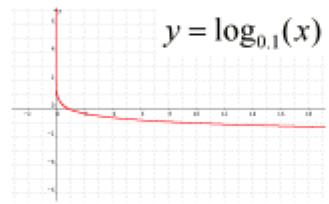


SEGUNDO CASO: 0 < a < 1

La función es decreciente







EJEMPLO PSU-1: Si $f(x) = \dfrac{|-2x+3|}{-2}$, entonces f(7) es igual a:

$A)\ 4$

$B)\ \dfrac{17}{2}$

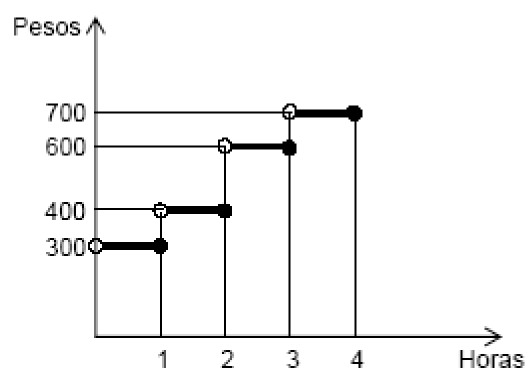
$C) -\dfrac{11}{2}$

$D)\ \dfrac{11}{2}$

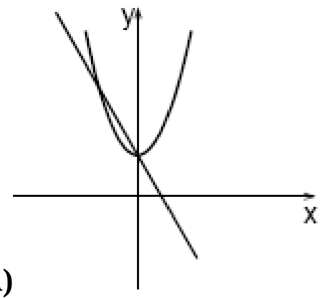
$E)\ -\dfrac{17}{2}$

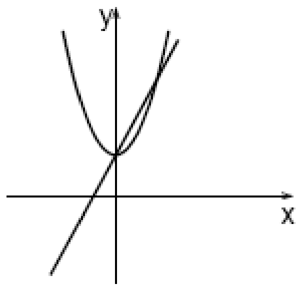
EJEMPLO PSU-2: En el gráfico de la figura, se muestran las tarifas de un estacionamiento por horas. Un automovilista estaciona durante 4 días: el primer día 152 minutos, el segundo día 180 minutos, el tercer día 90 minutos y el cuarto día 210 minutos. ¿Cuánto canceló en total por los días que estacionó?

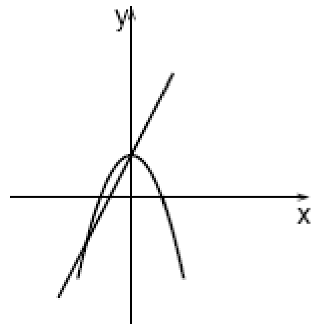
A) $ 1.900
B) $ 2.300
C) $ 2.400
D) $ 2.000
E) Ninguno de los valores anteriores.

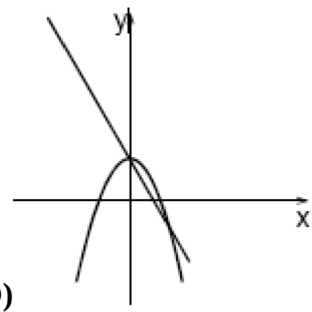


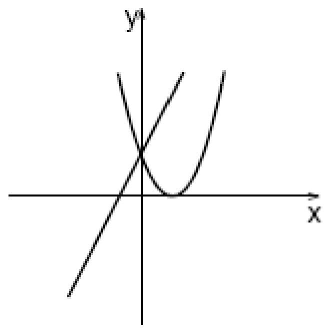
EJEMPLO PSU-3: ¿En cuál de las opciones siguientes se grafican las funciones $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2 + 1$?

A)


B)


C)


D)


E)


EJEMPLO PSU-4: La trayectoria de un proyectil está dada por la ecuación $y(t) = 100t - 5t^2$, donde **t** se mide en segundos y la altura **y(t)** se mide en metros, entonces ¿en cuál(es) de los siguientes valores de **t** estará el proyectil a
420 m de altura sobre el nivel del suelo?

I) 6 segundos
II) 10 segundos
III) 14 segundos

A) Sólo en I
B) Sólo en II
C) Sólo en III
D) Sólo en I y en II
E) Sólo en I y en III

EJEMPLO PSU-5: Considere la parábola $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$ ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I) La parábola se abre hacia arriba
II) Su vértice se encuentra en (1,0)
III) Su eje de simetría es $x = 1$

A) Solo I
B) Solo I y II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

EJEMPLO PSU-6: ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ en los números reales?

$A)\ [2,+\infty[$

$B)\ [-2,+\infty[$

$C)\ [0,+\infty[$

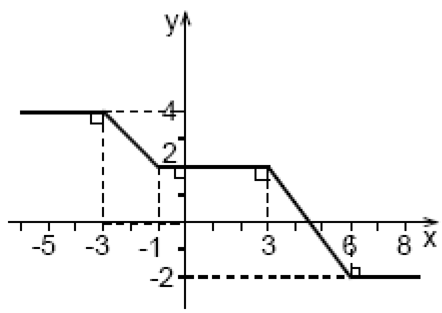
$D)\ ]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$

$E)\ [4,+\infty[$

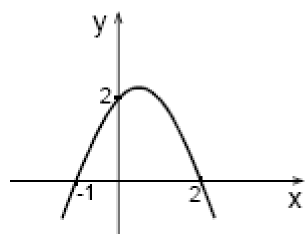
EJEMPLO PSU-7: ¿Cuál(es) de las siguientes aseveraciones es(son) verdadera(s) respecto del gráfico de la función f(x), en la figura?

I) f(– 2) > f(4)
II) f(– 1) + f(3) = f(– 3)
III) f(– 6) – f(8) = 2

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) Sólo II y III



EJEMPLO PSU-8: ¿Cuál es la ecuación de la parábola de la figura?
A) y = (– x + 1)(x – 2)
B) y = (x + 1)(x – 2)
C) y = (– x + 1)(x + 2)
D) y = (– x – 1)(x – 2)
E) y = (x + 1)(– x – 2)



EJEMPLO PSU-9: Sea f(x) una función tal que: $f(x - 1) = x^2 - (a + 1)x + 1$, entonces el valor de f(a) es
A) 1
B) 1 − a
C) 2 − a
D) 1 + a
E) 3 − 2a

EJEMPLO PSU-10: Sea f una función en los números reales, definida por f(x) = tx + 1 y f(-2) = 5 ¿Cuál es el valor de t?
A) -3
B) -2
C) 3
D) 2
E) $\frac{3}{2}$