



Módulo 1 Números 1º medio

Objetivos a evaluar:

- AE 09: Distinguir problemas que no admiten solución en los números enteros y que pueden ser resueltos en los números racionales.
- AE 10: Comprender el significado de las potencias de base racional y exponente entero.
- AE 11: Resolver problemas en contextos diversos que involucran números racionales o potencias de base racional y exponente entero.

Tiempo estimado:
90 minutos

INICIO

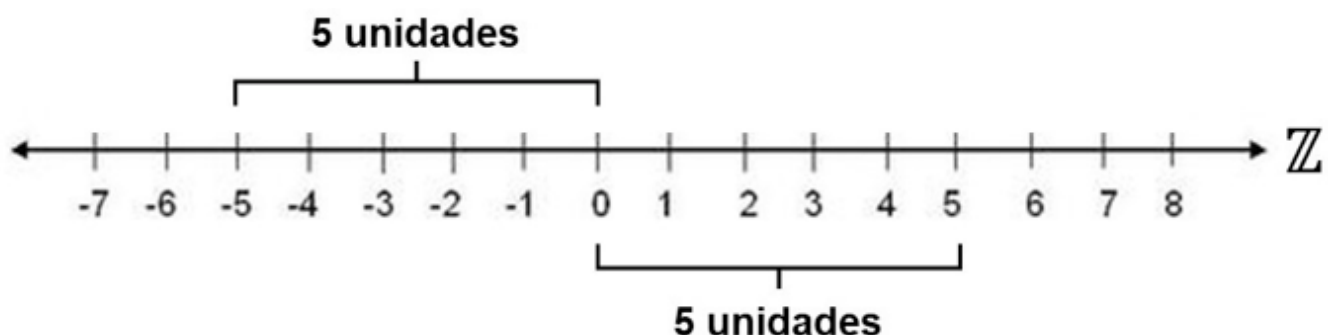
NÚMEROS ENTEROS Y RACIONALES

A medida que se avanza en el estudio de la Matemática, notarás que se va profundizando en ideas, conceptos y contenidos que, probablemente, ya conociste en cursos anteriores, así como también se van agregando nuevas definiciones y vas conociendo otras áreas de esta disciplina. Sea cual sea tu nivel de conocimiento matemático, lo que en este escrito se presenta es un resumen de parte del eje de “Números”, el que tiene por objetivo sentar las bases del cálculo aritmético en el Conjunto de los Números Enteros y de los Números Racionales, operatoria imprescindible para el aprendizaje de nuevos contenidos.

OPERATORIA EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS (\mathbb{Z})

Valor Absoluto de un número

¿A qué distancia está el número 5 con respecto al cero? Y el -5, ¿a qué distancia está del cero? Observemos la siguiente recta numérica:





Concepto de Valor Absoluto

El valor absoluto de un número entero se refiere a la distancia que este número se encuentra respecto al cero.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0 \\ 0, & \text{si } a = 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos

a) $|5| = 5$

b) $|-5| = -(-5) = 5$

c) $|-28| = 28$

d) $|0| = 0$

f) $|54| - |-6| = 54 - 6 = 48$

e) $|-10| + |10| = 10 + 10 = 20$

Como puedes apreciar, el valor absoluto de un número, al ser una distancia, es siempre un valor mayor o igual a cero.

Adición de Números Enteros

Caso 1

Para sumar números enteros de igual signo, se suman sus valores absolutos y se conserva el signo de ellos.

Observa:

$$-7 + (-10) = -17$$
$$|-7| + |-10| = 17$$



Ejemplos

a) $4 + 16 = 20$

b) $-9 + (-4) = -13$

c) $-8 + (-8) = -16$

d) $-12 + (-8) + (-4) = -24$

El paréntesis que aparece en algunos números enteros negativos es solo para separar el signo de la operación con el signo del respectivo número.



Caso 2

Para sumar números enteros de **distinto signo**, se hace la diferencia (positiva) entre sus respectivos valores absolutos, y **se conserva el signo del número que tiene el mayor valor absoluto**.

Observa:

$$\overset{\curvearrowright}{-12 + 8 = -4}$$

$$|-12| - |8| = 4$$

Ejemplos

a) $-3 + 8 = 5$

b) $14 + (-20) = -6$

c) $30 + (-29) = 1$

d) $-23 + 23 = 0$ →



Cuando la suma de dos números enteros da cero (neutro aditivo), entonces estos son números opuestos (o inversos aditivos).

Sustracción de Números Enteros

La resta de números enteros está definida como la adición entre el minuendo y el opuesto del sustraendo.

Observa:

$$5 - (-3) = 5 + 3 = 8$$

↓ *minuendo* ↓
 sustraendo

Ejemplos

a) $10 - (-1) = 10 + 1 = 11$

b) $11 - 13 = 11 + (-13) = -2$

c) $-4 - 6 = -4 + (-6) = -10$

d) $-27 - (-27) = -27 + 27 = 0$

En este caso, para restar 5 con -3, se mantiene el minuendo (5), al que se le suma el opuesto de -3, es decir, 3. Luego, se aplica el respectivo procedimiento para sumar números enteros.



Actividad 1:

Desarrolla y calcula.

1) $-6 + 8 =$

6) $7 + (-4) - 3 =$

2) $13 - 20 =$

7) $-9 + 3 - 6 =$

3) $5 - (-5) =$

8) $12 - 8 - (-4) =$

4) $3 + (-3) =$

9) $-1 - (-1) + 1 =$

5) $-25 - 10 =$

10) $15 + (-9) - (-2) - 6 =$

Multiplicación y División de Números Enteros

Para multiplicar y dividir números enteros, debes efectuar la respectiva operación y el resultado deberá respetar la siguiente regla de los signos:

+	·	+	=	+
-	·	-	=	+
+	·	-	=	-
-	·	+	=	-

+	:	+	=	+
-	:	-	=	+
+	:	-	=	-
-	:	+	=	-

Ejemplos

a) $-3 \cdot 8 = -24$

e) $18 : (-9) = -2$

b) $-12 \cdot (-1) = 12$

f) $-20 : (-5) = 4$

c) $5 \cdot (-7) = -35$

g) $49 : 7 = 7$

d) $9 \cdot 8 = 72$

h) $-17 : 17 = -1$



IMPORTANTE

• Al momento de desarrollar ejercicios con operatoria combinada, recuerda respetar la prioridad que existe entre ellas. Para esto, debes seguir el siguiente orden:

- 1° Resolver las operaciones encerradas por paréntesis.
- 2° Calcular las potencias y/o raíces.
- 3° Multiplicaciones y/o divisiones.
- 4° Sumas y/o restas.

• Tanto en la adición como en la multiplicación de números enteros, se cumple la propiedad conmutativa y la propiedad asociativa. Esto es:

Propiedad Conmutativa

- ▶ $a + b = b + a$ \Rightarrow El orden de los sumandos no altera el resultado
- ▶ $a \cdot b = b \cdot a$ \Rightarrow El orden de los factores no altera el producto

Propiedad Asociativa

- ▶ $(a + b) + c = a + (b + c)$
- ▶ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Ejemplos

$$\begin{aligned} \text{a) } 7 + 4 \cdot 8 - 10 &= \\ &= 7 + 32 - 10 \\ &= \boxed{29} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 12 : (15 - 9) + 2 &= \\ &= 12 : 6 + 2 \\ &= 2 + 2 \\ &= \boxed{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 3 \cdot 4^2 + 6 - (11 - 7) &= 3 \cdot 16 + 6 - 4 = 48 + 6 - 4 = 50 \\ &= 3 \cdot 16 + 6 - 4 \\ &= 48 + 6 - 4 \\ &= \boxed{50} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (15 + 9 \cdot 5) : [30 - (3 \cdot 2^3)] &= \\ &= (15 + 45) : [30 - (3 \cdot 8)] \\ &= 60 : (30 - 24) \\ &= 60 : 6 \\ &= \boxed{10} \end{aligned}$$



Actividad 2:

Desarrolla y calcula.

- 1) $4 - 12 + 8 =$
- 2) $-6 - 2 - 5 + 4 \cdot 3 =$
- 3) $21 : (-3) + 7 \cdot (-2) =$
- 4) $18 : (2 - 8) + 9 : (-9) =$
- 5) $-5 \cdot [6 : (-2 + 3)] - (4 - 5) \cdot (-1) =$
- 6) $(-11 + 9) \cdot (30 - 32) + 3^2 =$
- 7) $-7 + (-3 + 5)^3 - [(24 - 26) : (-2)] =$
- 8) $(-2)^2 - 16 : (-2)^3 - (-3 + 10) =$
- 9) $1 - 1 - (-1) + (-1) : (-1) + 1 - (-1) =$
- 10) $-25 : (-2 - 3) - [-4 \cdot (5 - 7)]^2 + 4 - 7 : 7 =$

OPERATORIA EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES (Q)

Concepto de Número Racional

Un número racional es todo aquel número que puede ser expresado en forma de razón, es decir, de la forma $\frac{a}{b}$, con a y b números enteros, y $b \neq 0$.

Tanto a como b reciben los siguientes nombres:

a → Numerador
 b → Denominador

Adición y Sustracción de Números Racionales

Para sumar o restar números racionales, existen dos métodos.

Método 1: Fórmula

Sean los racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, con b y d $\neq 0$, entonces:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$



Ejemplos

$$\text{a) } \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{6 + 5}{15} = \frac{11}{15}$$

$$\text{b) } \frac{7}{3} - \frac{5}{6} = \frac{7 \cdot 6 - 3 \cdot 5}{3 \cdot 6} = \frac{42 - 15}{18} = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$$

$$\text{c) } \frac{5}{3} - \frac{13}{8} = \frac{5 \cdot 8 - 3 \cdot 13}{3 \cdot 8} = \frac{40 - 39}{24} = \frac{1}{24}$$

$$\text{d) } \frac{4}{9} + \frac{2}{11} = \frac{4 \cdot 11 + 9 \cdot 2}{9 \cdot 11} = \frac{44 + 18}{99} = \frac{62}{99}$$

Método 2: Mínimo Común Múltiplo

Este método consiste en igualar los denominadores de los racionales dados, pues así resulta más sencillo sumarlos o restarlos. Se recomienda usar este método cuando hay más de dos racionales que se están operando.

Observa el desarrollo realizado para resolver el siguiente ejercicio:

$$\frac{1}{6} + \frac{7}{8} - \frac{3}{4} =$$

Paso 1: Se debe determinar el mínimo común múltiplo (mcm) entre los denominadores de estos racionales. Para esto, se pueden emplear dos procedimientos:

Procedimiento 1: "Múltiplos"

$$m(6) = \{6, 12, 18, \boxed{24}, 30, 36, 42, 48, 54, 60, \dots\}$$

$$m(8) = \{8, 16, \boxed{24}, 32, 40, 48, 56, 64, 72, \dots\}$$

$$m(4) = \{4, 8, 12, 16, 20, \boxed{24}, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, \dots\}$$

Luego, el $mcm(4,6,8)=24$



Procedimiento 2: "Tabla" (descomposición en factores primos)

$$\left. \begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ & 3 & 1 & 3 \\ & 1 & & \end{array} \right\} mcm(4, 6, 8) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

Paso 2: Los números racionales originales se expresan con sus respectivos racionales equivalentes, cuyo denominador corresponderá al mínimo común múltiplo encontrado. Esto es:

$$\frac{1}{6} + \frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{4}{24} + \frac{21}{24} - \frac{18}{24}$$

Paso 3: Por último, se deben sumar y restar los racionales, considerando que tienen igual denominador.

$$\frac{1}{6} + \frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{4}{24} + \frac{21}{24} - \frac{18}{24} = \frac{4 + 21 - 18}{24} = \frac{7}{24}$$

Ejemplos

$$\text{a) } \frac{7}{3} - \frac{5}{6} = \frac{14}{6} - \frac{5}{6} = \frac{14 - 5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\text{b) } \frac{9}{10} - \frac{2}{5} + \frac{7}{20} = \frac{18}{20} + \frac{8}{20} - \frac{7}{20} = \frac{18 + 8 - 7}{20} = \frac{19}{20}$$

$$\text{c) } \frac{5}{9} + \frac{1}{12} - \frac{11}{6} + \frac{7}{4} = \frac{20}{36} + \frac{3}{36} - \frac{66}{36} + \frac{63}{36} = \frac{20 + 3 - 66 + 63}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

IMPORTANTE

- No existe la división por cero, es decir, el denominador de un número racional nunca puede ser cero.
- Recuerda que todo número entero es también un número racional, pues tiene como denominador el número 1.

Ejemplos:

$$7 = \frac{7}{1} \quad \left| \quad 25 = \frac{25}{1} \quad \left| \quad 1 = \frac{1}{1} \right. \right.$$



- No olvides verificar si las fracciones que vas obteniendo en tus cálculos están expresadas en su forma irreductible. De no ser así, es recomendable simplificarlas.
- Un número mixto es la suma entre un número entero y una fracción. Esto es:

$$A\frac{b}{c} = A + \frac{b}{c} = \frac{Ac + b}{c}$$

Ejemplos

$$\text{a) } 5\frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{17}{3}$$

$$\text{b) } 3\frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{13}{4}$$

$$\text{c) } 1\frac{4}{7} = 1 + \frac{4}{7} = \frac{1 \cdot 7 + 4}{7} = \frac{11}{7}$$

Multiplicación de Números Racionales

Para multiplicar dos números racionales, se multiplican sus numeradores y denominadores entre sí. Es decir, si consideramos los racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, con b y $d \neq 0$, entonces:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Ejemplos

$$\text{a) } \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$$

$$\text{c) } 9 \cdot \frac{1}{6} = \frac{9}{1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}} \cdot 1}{1 \cdot \underset{2}{\cancel{6}}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{b) } \frac{4}{14} \cdot \frac{10}{3} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot 10}{\underset{7}{\cancel{14}} \cdot 3} = \frac{20}{21}$$

$$\text{d) } \frac{5}{3} \cdot 2\frac{4}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot 14}{\underset{1}{\cancel{5}}} = \frac{14}{3}$$



División de Números Racionales

Para dividir dos fracciones, se multiplica la fracción dividendo por el inverso multiplicativo de la fracción divisor. Es decir, si consideramos las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, con b y $d \neq 0$, entonces:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplos

$$\text{a) } \frac{4}{5} : \frac{3}{7} = \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{28}{15}$$

$$\text{c) } \frac{3}{4} : 8 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 8} = \frac{3}{32}$$

$$\text{b) } \frac{10}{9} : \frac{1}{2} = \frac{10}{9} \cdot \frac{2}{1} = \frac{10 \cdot 2}{9 \cdot 1} = \frac{20}{9}$$

$$\text{d) } 4\frac{2}{5} : \frac{7}{5} = \frac{22}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{22 \cdot \cancel{5}^1}{\cancel{5}_1 \cdot 7} = \frac{22}{7}$$

IMPORTANTE

• Al momento de resolver operatoria combinada con números racionales, debes respetar, al igual que con los números enteros, la prioridad de las operaciones. Es decir:

- 1° Resolver las operaciones encerradas por paréntesis.
- 2° Calcular las potencias y/o raíces.
- 3° Multiplicaciones y/o divisiones.
- 4° Sumas y/o restas.

• Para multiplicar y dividir números racionales, debes efectuar la respectiva operación y el resultado respetará la misma regla de los signos que para multiplicar y dividir números enteros. Esto es:

$$\begin{array}{l} + \cdot + = + \\ - \cdot - = + \\ + \cdot - = - \\ - \cdot + = - \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + : + = + \\ - : - = + \\ + : - = - \\ - : + = - \end{array}$$

• La propiedad conmutativa y asociativa también se cumplen en la multiplicación y división de números racionales.



Ejemplos

$$\text{a) } -\frac{2}{3} + \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{2} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{1} = -\frac{2}{3} + \frac{10}{7} = \frac{-14 + 30}{21} = \boxed{\frac{16}{21}}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 8 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{2}{5} : \left(-\frac{6}{7}\right) &= 2 \cdot \left(-\frac{3}{1}\right) + \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{7}{6}\right) = -6 + \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) = -6 - \frac{7}{15} \\ &= \frac{-90 - 7}{15} = \boxed{-\frac{97}{15}} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{2}\right) : \left(-\frac{10}{3} + 4\right) = \left(\frac{5}{6} - \frac{9}{6}\right) : \left(\frac{-10 + 12}{3}\right) = -\frac{4}{6} : \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} : \frac{2}{3} = \boxed{-1}$$

Números Decimales

Considerando que un número racional es el cociente entre dos números enteros (distinto de cero el denominador), si efectuamos la respectiva división, obtendremos su representación como número decimal.

Ejemplos

$$\text{a) } \frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75$$

$$\text{d) } \frac{15}{4} = 15 : 4 = 3,75$$

$$\text{b) } \frac{1}{2} = 1 : 2 = 0,5$$

$$\text{e) } \frac{21}{2} = 21 : 2 = 10,5$$

$$\text{c) } \frac{10}{3} = 10 : 3 = 3,\bar{3}$$

$$\text{f) } \frac{7}{90} = 7 : 90 = 0,0\bar{7}$$

Desafío

¿Cuál es el resultado exacto al sumar $1,4$ y $0,\bar{7}$?

Para resolver operatoria con este tipo de números decimales, se hace necesario expresarlos en su forma racional para luego realizar la operación correspondiente. De esta manera, el resultado que se obtendrá será exacto.



Transformación de un Número Decimal a Fracción

- De decimal finito a fracción

Para transformar un número decimal finito a fracción, en el numerador se escribe el número como si fuera un entero, es decir, sin la coma decimal, y en el denominador se escribe una potencia de 10, con tantos ceros como cifras decimales tenga el número decimal. Luego, se simplifica si es posible.

Ejemplos

$$\text{a) } 0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$\text{c) } 32,8 = \frac{328}{10} = \frac{164}{5}$$

$$\text{b) } 1,5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

$$\text{d) } 3,014 = \frac{3014}{1000} = \frac{1507}{500}$$

- De decimal periódico a fracción

En el numerador se escribe el número como si fuera un entero, al que se le debe restar el periodo, mientras que en el denominador se escriben tantos 9 como cifras periódicas tenga el número decimal. Luego, se simplifica si es posible.

Ejemplos

$$\text{a) } 6,\bar{3} = \frac{63 - 6}{9} = \frac{57}{9} = \frac{19}{3}$$

$$\text{c) } 1,\bar{24} = \frac{124 - 1}{99} = \frac{123}{99} = \frac{41}{33}$$

$$\text{b) } 0,\bar{27} = \frac{27 - 0}{99} = \frac{3}{11}$$

$$\text{d) } 20,\bar{6} = \frac{206 - 20}{9} = \frac{186}{9} = \frac{62}{3}$$

- De decimal semiperiódico a fracción

En el numerador se escribe el número como si fuera un entero, restándole el número que forman las cifras que están antes del periodo, mientras que en el denominador se escriben tantos 9 como cifras tenga el periodo, seguido de tantos ceros como cifras tenga el ante periodo. Luego, se simplifica si es posible.

Ejemplos

$$\text{a) } 7,2\bar{1} = \frac{721 - 72}{90} = \frac{649}{90}$$

$$\text{c) } 2,3\bar{7} = \frac{237 - 23}{90} = \frac{214}{90} = \frac{107}{45}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 0,43\bar{6} &= \frac{436 - 43}{900} = \frac{393}{900} \\ &= \frac{131}{300} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 10,6\bar{48} &= \frac{10648 - 106}{990} \\ &= \frac{10542}{990} = \frac{1757}{165} \end{aligned}$$



Observación

Aquellos números decimales infinitos que no poseen un periodo, no pueden ser expresados como un número racional. Este tipo de números son los que forman el Conjunto de los Números Irracionales (I), en donde un ejemplo clásico es el número π , que representa el cociente entre la longitud de una circunferencia y la longitud de su diámetro, y cuyo valor es 3,14159265...

Ahora, apliquemos lo anterior para dar respuesta al desafío planteado. Para esto, expresaremos cada decimal en su forma racional y luego sumaremos.

$$\left. \begin{array}{l} 1,4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5} \\ 0,\bar{7} = \frac{7}{9} \end{array} \right\} \longrightarrow 1,4 + 0,\bar{7} = \frac{7}{5} + \frac{7}{9} = \frac{63 + 35}{45} = \frac{98}{45} = 2,1\bar{7}$$

Por lo tanto, $1,4 + 0,\bar{7} = \boxed{2,1\bar{7}}$

Actividad 3:

Desarrolla y calcula.

1) $\frac{2}{9} - \frac{3}{9} =$

2) $-\frac{5}{4} : \frac{7}{12} =$

3) $\frac{1}{6} + \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} - \frac{7}{3} =$

4) $\frac{9}{10} \cdot \left(4 - \frac{13}{4}\right) - \frac{13}{20} =$



$$5) \frac{2}{7} : \frac{1}{14} + \frac{21}{5} \cdot \frac{5}{3} =$$

$$6) 3,5 + \frac{5}{4} - 4,75 =$$

$$7) 0,\bar{6} \cdot \left(-\frac{18}{5}\right) + \frac{1}{2} : (-10) =$$

$$8) 1,0\bar{2} - 0,1\bar{8} =$$

$$9) 0,75 \cdot \frac{20}{3} - 1,25 =$$

$$10) -0,8 : \frac{12}{5} + \frac{11}{3} : 3,\bar{6} =$$



Potencias de base racional exponente entero

Una potencia corresponde a una multiplicación iterada, representada por:

$$a \cdot a \cdot a \dots = a^n, \forall a \wedge n \in \mathbb{Z}$$

Considerando a =base de la potencia y n =exponente

Propiedades

- Multiplicación de potencias de igual base: $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$
- División de potencias de igual base: $a^n : a^m = a^{n-m}$
- Multiplicación de potencias de igual exponente: $a^n \cdot a^m = (a \cdot b)^n$
- División de potencias de igual exponente: $a^n : b^n = (a:b)^n$
- Potencia de una potencia: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- Potencias de exponentes negativos: $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$

Actividad 4:

Resuelve las siguientes potencias utilizando definición y propiedades.

a) $(\frac{2}{5})^4 =$

b) $(\frac{-3}{7})^3 =$

c) $(\frac{6}{5})^{10} : (\frac{6}{5})^3 =$

d) $(\frac{2}{3})^5 \cdot (\frac{2}{3})^2 =$



CIERRE

Define los conceptos vistos en este taller.

Número racional	Decimal periodico	Potencias