POTENCIAS

Corresponde a una multiplicación reiterada de términos o números iguales

exponente

base $\leftarrow$ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$

Ejemplos:

$$7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$$

$$(-6)^2 = (-6) \cdot (-6) = 36$$

$$\boxed{-x^n \textbf{ NO} \text{ siempre es igual a } (-x)^n}$$

Por ejemplo : $-3^2 \neq (-3)^2$, ya que

$-3^2 = -3 \cdot 3 = -9$ y $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

$$\boxed{\left(\frac{x}{y}\right)^n \textbf{ NO} \text{ siempre es igual a } \frac{x^n}{y}}$$

Por ejemplo : $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \neq \frac{2^3}{3}$, ya que

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$ y $\frac{2^3}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3} = \frac{8}{3}$

Signos de una potencia

- **Potencias con exponente par**

Las potencias que tienen exponente par, son siempre positivas, sin importar el signo de la base.

Ejemplos:

$$1)\ (-11)^2 = (-11)\cdot(-11) = 121$$

$$2)\ \left(\frac{-3}{5}\right)^4 = \frac{(-3)}{5}\cdot\frac{(-3)}{5}\cdot\frac{(-3)}{5}\cdot\frac{(-3)}{5} = \frac{81}{625}$$

- **Potencias con exponente impar**

Las potencias que tienen exponente impar, son positivas si su base es positiva y negativas si su base es negativa.

Ejemplos:

$$1)\ (-12)^3 = (-12)\cdot(-12)\cdot(-12) = -1.728$$

$$2)\ \left(\frac{-2}{3}\right)^5 = \frac{(-2)}{3}\cdot\frac{(-2)}{3}\cdot\frac{(-2)}{3}\cdot\frac{(-2)}{3}\cdot\frac{(-2)}{3} = \frac{-32}{243}$$

PROPIEDADES

- **Multiplicación de potencias**

Igual base	Igual exponente
Se conserva la base y se suman los exponentes. $\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$ **Ejemplo:** $5^x \cdot 5^{3x} = 5^{x+3x} = 5^{4x}$	Se multiplican las bases y se conserva el exponente. $\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$ **Ejemplo:** $4^2 \cdot 2^2 = (4 \cdot 2)^2 = 8^2 = 64$

- **División de potencias**

Igual base	Igual exponente
Se conserva la base y se restan los exponentes. $\boxed{a^n : a^m = a^{n-m} \quad , a \neq 0}$ **Ejemplo:** $\frac{9^{23}}{9^6} = 9^{23-6} = 9^{17}$	Se dividen las bases y se conserva el exponente. $\boxed{a^n : b^n = (a : b)^n \quad , b \neq 0}$ **Ejemplo:** $\frac{28^2}{4^2} = (28 : 4)^2 = 7^2 = 49$

Potencia de potencia

$$\boxed{(a^n)^m = a^{m \cdot n}}$$

Ejemplo: $(2^{10})^4 = 2^{10 \cdot 4} = 2^{40}$

Potencias de exponente cero

0^0 : indeterminado

$$\boxed{a^0 = 1, \quad a \neq 0}$$

Ejemplo: si $x \neq 12y$:

$$\left(\frac{x}{3} - 4y\right)^{7-(15-8)} = \left(\frac{x}{3} - 4y\right)^{0} = 1$$

Potencias de exponente negativo

Base entera	Base fraccionaria
$\boxed{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad a \neq 0}$	$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad a \neq 0;\ b \neq 0}$
Ejemplo: $4^{-2} \cdot (2)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot (2)^2 = \left(\frac{1}{16}\right) \cdot 4 = \frac{1}{4}$	**Ejemplo:** $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27}$

Adición y sustracción de potencias

<u>No existe propiedad para sumar y/o restar potencias</u>. Es necesario resolver cada potencia y luego aplicar cada operación planteada.

Algunas veces podemos utilizar el concepto de factorización para reducir una expresión que contenga sumas y/o restas de potencias

Ejemplo:

$$4^2 + 4^2 = 2 \cdot 4^2 = 2 \cdot (2^2)^2 = 2 \cdot 2^4 = 2^5$$

- **Potencias de base 10**

Con exponente positivo	Con exponente negativo
$10^1 = 10$	$10^{-1} = 0,1$
$10^2 = 100$	$10^{-2} = 0,01$
$10^3 = 1.000$	$10^{-3} = 0,001$
$10^4 = 10.000$	$10^{-4} = 0,0001$

Ejemplos:

$$54.000.000 = 54 \cdot 1.000.000 = 54 \cdot 10^6$$

$$0,00004 = 4 \cdot 0,00001 = 4 \cdot 10^{-5}$$

<u>Ejemplo DEMRE:</u>

$$(2t \cdot 3s^3)^2 =$$

A) $26ts^3$
B) $36t^2s^6$
C) $6t^2s^5$
D) $6t^2s^6$
E) $24t^2s^6$

*Fuente : **DEMRE - U. DE CHILE**, Proceso de admisión 2011.*

RAÍCES

Una raíz es una cantidad que se debe multiplicar por sí misma tantas veces como indique el índice, para obtener un número determinado.

$$\sqrt[b]{x} = c \text{ , ya que } c^b = x$$

Los términos de una raíz son:

$\sqrt[b]{x^a} = c$ b: índice
x^a: cantidad subradical
c: radical

$b \in N$; $a \in Z$

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ ya que } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[4]{81} = 3, \text{ ya que } 3^4 = 81$$

El concepto de raíz se relaciona con las potencias ya que esta corresponde a una potencia con exponente fraccionario

$$x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a} \quad ; \quad b \in N \text{ , } a \in Z$$

Ejemplos:

$$8^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{8^2} = \sqrt[5]{64}$$

$$\left[\frac{1}{4}\right]^{-\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$$

Propiedades

- **Multiplicación de raíces**

De igual índice: Se multiplican las cantidades subradicales conservando el índice que tienen en común.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad ; n \in N$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} = 3$$

De igual cantidad subradical: Cada raíz se transforma a potencia y luego se realiza la multiplicación de potencias

- **División de raíces**

De igual índice: Se dividen las cantidades subradicales conservando el índice que tienen en común

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b} \quad ; n \in N, b \neq 0$$

Ejemplo:

$$\sqrt[4]{512} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{512:2} = \sqrt[4]{256} = 4$$

De igual cantidad subradical: Cada raíz se transforma a potencia y luego se realiza la división de potencias.

- **Raíz de una raíz**

Se multiplican los índices

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a} \quad ; m, n \in N$$

Ejemplo:

$$\sqrt[5]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[5\cdot 4]{2} = \sqrt[20]{2}$$

- **Composición de una raíz**

Se utiliza para ingresar un factor a una raíz.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b} \quad ; n \in N$$

Ejemplo:

$$3\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{81\cdot 2} = \sqrt[4]{162}$$

- **Descomposición de una raíz**

Se utiliza cuando un factor de la cantidad subradical tiene raíz exacta.

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a\sqrt[n]{b} \quad ; n \in N$$

Ejemplo:

$$\sqrt{162} = \sqrt{81\cdot 2} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

Racionalización

Cuando tenemos expresiones fraccionarias con raíces en el denominador, conviene trasformar esta fracción, a una nueva expresión, pero sin las raíces en el denominador. A este proceso se le llama **racionalización**. Podemos agrupar las formas de racionalización en tres tipos:

- **Raíz cuadrada**

$$\frac{4}{\sqrt{3}} = ?$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

- **Raíz enésima**

$$\frac{4}{\sqrt[5]{3^2}} = ?$$

$$\frac{4}{\sqrt[5]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{4\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{4\sqrt[5]{27}}{3}$$

- **Adición o sustracción de raíces**

$$\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = ?$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}$$

$$= \frac{4(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{1}$$

<u>Ejemplo DEMRE:</u>

Para todo $m > 0$ la expresión $\sqrt[3]{m^4} \cdot \sqrt[3]{m^2} \cdot \sqrt{m}$ es igual a

A) m
B) $\sqrt[8]{m^7}$
C) $\sqrt{m^5}$
D) $\sqrt[5]{m^7}$
E) $\sqrt[6]{m^7}$

*Fuente : **DEMRE - U. DE CHILE**, Proceso de admisión 2011.*