Números racionales

Objetivo

- Conocer el conjunto de los números racionales.

De los *pendrives* que se muestran en la imagen, si compraras el de color rojo y utilizaras la quinta parte de su capacidad para guardar archivos de música.

- Escribe la fracción y el número decimal que representa la capacidad de música que utilizarías.

Fracción ▶ ☐ Número decimal ▶ ☐

La fracción y el número decimal que representa la capacidad utilizada en guardar estos archivos, son números racionales.

Atención

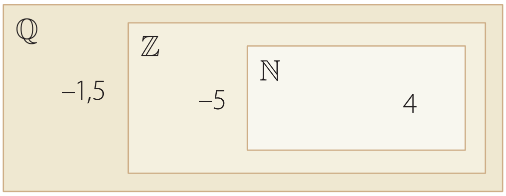
Todo número natural o entero puede ser representado como un número racional:

Ejemplos: $5 = \frac{5}{1}$

$-3 = -\frac{3}{1}$

Si un número pertenece a algún conjunto numérico se anota $\in$, en caso contrario se anota $\notin$. Gráficamente esto se podría representar como:

$-1{,}5 \in \mathbb{Q}$	$-1{,}5 \notin \mathbb{Z}$	$-1{,}5 \notin \mathbb{N}$
$-5 \in \mathbb{Q}$	$-5 \in \mathbb{Z}$	$-5 \notin \mathbb{N}$
$4 \in \mathbb{Q}$	$4 \in \mathbb{Z}$	$4 \in \mathbb{N}$



- A continuación, reconocerás algunos conjuntos numéricos estudiados en años anteriores y formalizarás de manera simbólica el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$).

Conceptos

- Los **números naturales** ($\mathbb{N}$) se representan por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Los **números enteros** ($\mathbb{Z}$) se representan por $\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$.
- Los **números racionales** ($\mathbb{Q}$) se representan por:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \text{ tal que } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

- El siguiente diagrama te ayudará a comprender el conjunto de los números racionales.

Números racionales
- Fracciones ▶ $\frac{2}{5}$
- Decimales
  - Finitos ▶ $-3{,}5$
  - Infinitos
    - Periódicos ▶ $0{,}5353... = 0{,}\overline{53}$
    - Semiperiódicos ▶ $-2{,}34747... = -2{,}3\overline{47}$

Simbólicamente se tiene que: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, es decir, todo número natural es un número entero y todo número entero puede ser representado como un número racional.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Anota $\in$ si el número pertenece al conjunto numérico, en caso contrario anota $\notin$ (no pertenece).

a. $2{,}5 \bigcirc \mathbb{Z}$

b. $-\frac{2}{7} \bigcirc \mathbb{Z}$

c. $125 \bigcirc \mathbb{N}$

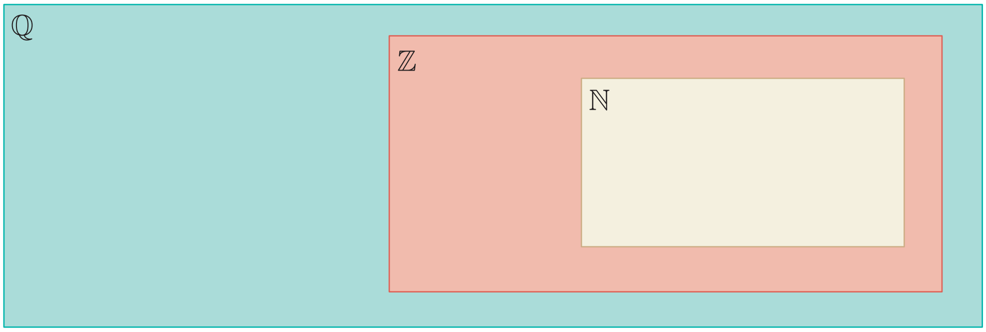
d. $4{,}2 \bigcirc \mathbb{Q}$

e. $-4 \bigcirc \mathbb{N}$

f. $-2{,}\overline{5} \bigcirc \mathbb{Q}$

2. Observa el siguiente diagrama. Luego, ubica en el conjunto numérico correspondiente.

$3 \quad -7{,}4 \quad -0{,}\overline{265} \quad 9 \quad -15 \quad \frac{8}{15} \quad \frac{-8}{923} \quad 98 \quad 1{,}2 \quad \frac{15}{33}$



3. Analiza la siguiente situación. Luego, responde las preguntas y compara tus procedimientos con los de tus compañeros.

> Las focas y los elefantes marinos son mamíferos que pasan la mayor parte del tiempo en los océanos. La foca común llega a medir 1,9 m; la foca de Largha, $\frac{9}{5}$ m; la foca de Baikal, 1,4 m, y la foca anillada, 1,6 m.

a. Entre estas especies, ¿cuál es la foca de menor longitud? ¿Concuerdas con tus compañeros? Explica.

b. ¿Cuál es la fracción que representa la medida de la foca común?

4. Álgebra Determina, en cada caso, a qué conjuntos numéricos pertenece la solución de la ecuación $ax + b = c$, donde las variables a, b y c representan números naturales.

a. $b < c$ y $(b - c)$ es múltiplo de a.

b. $b > c$ y $(b - c)$ es múltiplo de a.

c. $b < c$ y $(b - c)$ no es múltiplo de a.

d. $b > c$ y $(b - c)$ no es múltiplo de a.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 6 - 7

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿En qué otra situación cotidiana utilizas los números racionales? Explica.

____

____

- ¿Qué estrategias ocupaste para clasificar números según el conjunto numérico al que pertenecen?

____

Adición y sustracción de números racionales

Objetivos

- Resolver adiciones y sustracciones de números racionales de manera simbólica.
- Resolver problemas que involucren adiciones y sustracciones de números racionales.

Un grupo de montañistas se propone escalar el monte Everest. Debido a las dificultades climáticas deciden usar como recurso una *tablet* para buscar la mejor ruta y así conseguir su objetivo.

Actitud

Algunos montañistas chilenos han escalado el monte Everest; sin duda perseveraron en lo que se habían propuesto hasta lograr su objetivo. Sé perseverante al momento de resolver un problema y cumple los objetivos que te propongas.

¿A qué distancia del campamento 2 está la cumbre del monte Everest?

- Relaciona la información anterior y completa según corresponda.

Operación por realizar

Cumbre del monte Everest

Altura campamento 2

- Responde la pregunta del problema. ▸ ______________________
- En esta actividad pudiste realizar una operación entre números racionales para responder la pregunta planteada. Ahora generalizarás la **adición y sustracción de números racionales de manera simbólica**.

Conceptos

Para resolver una **adición** o **sustracción de números racionales**, considera lo siguiente:

- Si están representados como **números decimales**, los ordenas de manera vertical, con la condición de que la coma decimal quede alineada, y resuelves.
- Si están representados como **fracciones**, simbolicamente resuelves:

Adición: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$

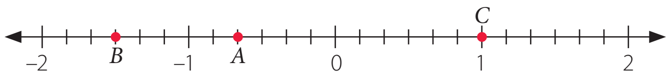
Sustracción: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$

Donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, $d \neq 0$.

- En el caso que los números sean enteros, utilizas los procedimientos que ya has estudiado.

Ejemplo 1

La recta numérica está graduada en partes iguales.



¿Cuál es el resultado de la diferencia entre A y B aumentada en C?

Para responder la pregunta, puedes realizar lo siguiente:

PASO A PASO

1. $A = -\frac{4}{6}, B = -\frac{9}{6}, C = 1,$ ⟶ Determinas el número racional que representa cada letra.
2. $A - B + C = -\frac{4}{6} - \left(\frac{-9}{6}\right) + 1$ ⟶ Remplazas en la expresión.
3. $-\frac{4}{6} - \left(\frac{-9}{6}\right) + \frac{6}{6} = \frac{-4+9+6}{6} = \frac{11}{6}$ ⟶ Resuelves.

Respuesta: El resultado de $A - B + C$ es $\frac{11}{6} = 1{,}8\overline{3} = 1\frac{5}{6}$.

Atención

Recuerda que hay una relación entre lo escrito en lenguaje natural con ciertas operaciones matemáticas.

Lenguaje natural	Operación
Aumentado, sumado	$+$
Disminuido, restado, diferencia	$-$

Ejemplo 2

Considera que $x = \frac{5}{7}$ y $z = 3{,}\overline{2}$. ¿Cuál es el resultado de la adición entre x y z?

Para responder la pregunta, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. $x + z = \frac{5}{7} + 3{,}\overline{2}$ ⟶ Remplazas en la expresión.
2. $x + z = \frac{5}{7} + \frac{29}{9}$ ⟶ Representas como una fracción: $3{,}\overline{2} = \frac{32-3}{9} = \frac{29}{9}$.
3. $x + z = \frac{248}{63}$ ⟶ Sumas las fracciones: $\frac{5}{7} + \frac{29}{9} = \frac{5 \cdot 9 + 29 \cdot 7}{7 \cdot 9} = \frac{248}{63}$.

Respuesta: El resultado de $x + z$ es $\frac{248}{63}$.

Habilidad

Cuando eliges una estrategia estás desarrollando la habilidad de **resolver problemas**.

Ejemplo 3

Resuelve el siguiente problema.

De un *pendrive* de 16 Gb se utilizan 2,5 Gb en música y $1\frac{1}{4}$ Gb en documentos. ¿Cuánta memoria queda disponible?

Analiza los siguientes pasos que te ayudarán a resolver el problema.

PASO A PASO

1. A la capacidad del *pendrive* le restas la memoria utilizada: $16 - 2{,}5 - 1\frac{1}{4}$.
2. Puedes representar $1\frac{1}{4}$ con el número decimal 1,25 y luego resuelves:

$$16 - 2{,}5 - 1\frac{1}{4} = 13{,}5 - 1{,}25 = 12{,}25$$

Respuesta: Quedan disponibles 12,25 Gb.

Atención

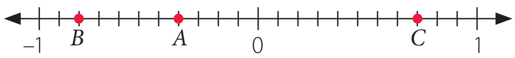
Si en el ejemplo 2 representas como un número decimal la fracción $\frac{5}{7}$, ¿el resultado sería el mismo?

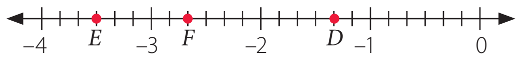
En una adición o una sustracción de números racionales, ¿podrías obtener como resultado un número entero? ¿Por qué? Comenta con un compañero o una compañera.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. **Cada recta numérica está graduada en partes iguales.**





Calcula el valor según corresponda.

a. $A + B + C$

b. $D + E + F$

c. $A - B - C$

d. $D - E - F$

e. $A + D - E$

f. $B - D + C$

2. **Analiza la siguiente información y responde.**

Entre 4 grupos de un colegio recolectaron 200 kg de papel para reciclarlo. El primer grupo recogió $60\frac{1}{4}$ kg; el segundo, $13\frac{1}{5}$ kg, y el tercero, 45,93 kg.

a. Si lo recolectado por el cuarto grupo se anota como x, ¿qué expresión representa la relación entre todas la cantidades involucradas?

b. ¿Cuántos kilogramos de papel recolectó el cuarto grupo?

c. ¿Qué grupo recolectó más kilogramos de papel? ¿Cuál menos? ¿Cuántos kilogramos de diferencia hay entre estos grupos?

d. ¿Cuántos kilogramos más de papel recolectó el primer grupo que el segundo?

3. **Determina los valores de A, B, C, D, E, F, G y H según corresponda.**

a.

0,4	+	A	=	$\frac{9}{10}$
–		–		–
B	+	C	=	$\frac{3}{15}$
=		=		=
$\frac{3}{5}$	+	0,1	=	D

b.

$-0,\overline{3}$	+	E	=	$\frac{13}{60}$
+		–		–
F	+	0,725	=	H
=		=		=
$-\frac{1}{3}$	+	G	=	$-\frac{61}{120}$

4. **A partir del ítem anterior, responde.**

a. ¿Cuál es el valor de $A + B - C + D$?

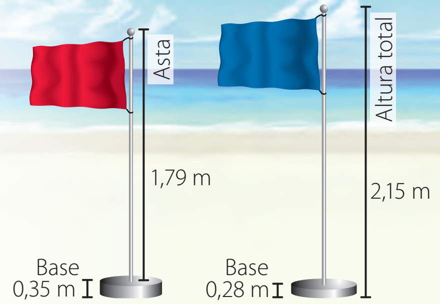
b. ¿Cuál es el valor de $E - G - F + H$?

5. A partir de la imagen, responde las siguientes preguntas.

a. ¿Cuál es la altura del asta de la bandera azul?

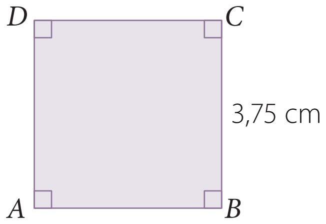
b. ¿Cuál es la altura total de la bandera roja?

c. ¿Cuál es la diferencia positiva de las medidas de las astas de las bandera?



6. Geometría El perímetro de un polígono corresponde a la suma de la medida de sus lados. Considerando lo anterior, calcula el perímetro (P) de los siguientes polígonos.

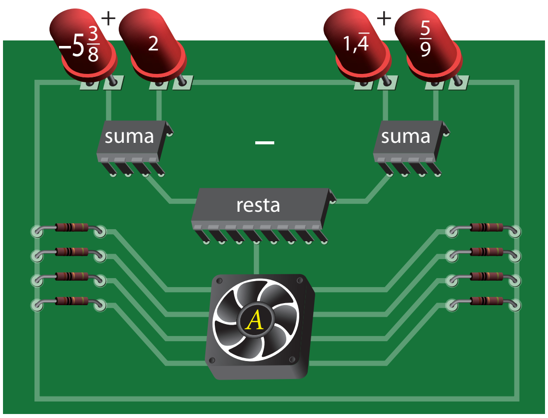
a. $ABCD$ cuadrado.



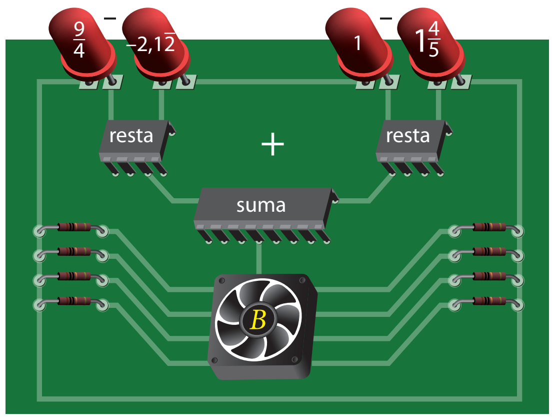
b. $EFGH$ rectángulo.

7. Elige uno de los circuitos, y pídele a un compañero o una compañera que resuelva el otro. Luego, comparen sus respuestas y expliquen cómo lo resolvieron.

a.



b.



Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 8 - 9

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué estrategia utilizaste al resolver adiciones o sustracciones de números racionales que involucraban su forma decimal y fraccionaria al mismo tiempo?

____

____

- ¿Fuiste perseverante al resolver problemas? ¿Cómo demostraste esa actitud?

____

Multiplicación y división de números racionales

Objetivos

- Resolver multiplicaciones y divisiones de números racionales de manera simbólica.
- Resolver problemas que involucren la multiplicación y la división de números racionales.

En diversas situaciones, el uso de calculadora te ayudará a comprobar ciertos cálculos que involucren números racionales.

En este caso, Sandra utiliza su calculadora para ayudar a Cristian a determinar la cantidad de metros de hilo que está usando para elevar su volantín.

Atención

En algunas calculadoras el punto corresponde a la coma decimal.

Para calcularlo, Sandra sabe que 1 yarda equivale a 0,9144 m, por lo que presiona las siguientes teclas.

0 . 9 1 4 4 X 5 5 0

- ¿Es correcto lo anterior? ¿Por qué? Explica.

___

___

Actitud

Es importante que, cuando te enfrentes a una situación problema, compruebes siempre tus resultados y corrijas los posibles errores que cometas en su resolución.

- Encierra el resultado que te permite responder la pregunta.

502.92   50.292   5029.2

- Para resolver algunos problemas de la vida real es necesario aplicar la **multiplicación o la división de números racionales**. A continuación, se generalizarán estas **operaciones de manera simbólica**.

Conceptos

Para **multiplicar números racionales** debes tener en cuenta lo siguiente:

- Si son **números decimales**, los multiplicas de manera habitual, considerando que la posición de la coma decimal se desplaza, de derecha a izquierda, tantos lugares como cifras decimales tenga cada número decimal.
- Si están representados como **fracciones**, simbólicamente resuelves.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \text{ donde } a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \text{ con } b \neq 0, d \neq 0.$$

Ejemplo 1

Considera que $X = -\frac{8}{3}$, $Y = 2{,}1\overline{3}$, ¿cuál es el producto entre X e Y?

Para responder la pregunta puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. $X \cdot Y = -\frac{8}{3} \cdot 2{,}1\overline{3}$ → Remplazas en la expresión.
2. $X \cdot Y = -\frac{8}{3} \cdot \frac{32}{15}$ → Representas como una fracción: $2{,}1\overline{3} = \frac{213-21}{90} = \frac{192}{90} = \frac{32}{15}$
3. $X \cdot Y = -\frac{256}{45}$ → Resuelves: $-\frac{8}{3} \cdot \frac{32}{15} = -\frac{8 \cdot 32}{3 \cdot 15} = -\frac{256}{45}$

Respuesta: El resultado de $X \cdot Y$ es $-\frac{256}{45}$, o sea, el número decimal $-5{,}6\overline{8}$.

Atención

Recuerda que hay una relación entre lo escrito en lenguaje natural con ciertas operaciones matemáticas.

Lenguaje natural	Operación
Multiplicado, producto	•
Dividido, cociente	:

Conceptos

En el conjunto de los números racionales se tiene lo siguiente:

- El **inverso multiplicativo** o **recíproco** de un número $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, se representa por $\frac{1}{a}$, y cumple que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.
- Para calcular el **cociente entre dos números racionales**, es posible resolver una multiplicación en la que el dividendo se multiplica por el inverso multiplicativo del divisor.

Simbólicamente: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$.

Visita la Web

Para saber más sobre multiplicación de números racionales, visita el siguiente sitio web:

http://www.vitutor.com/di/r/a_12.html

Ejemplo 2

Considera que $A = \frac{2}{5}$, $B = 1{,}\overline{2}$. ¿Cuál es el cociente de la división $A : B$?

Para responder a la pregunta, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. $\frac{A}{B} = \frac{\frac{2}{5}}{1{,}\overline{2}}$ → Remplazas en la expresión.
2. $\frac{A}{B} = \frac{2}{5} : \frac{11}{9}$ → Representas como una fracción: $1{,}\overline{2} = \frac{12-1}{9} = \frac{11}{9}$.
3. $\frac{A}{B} = \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{11}$ → El inverso multiplicativo de $\frac{11}{9}$ es $\frac{9}{11}$.
4. $\frac{A}{B} = \frac{18}{55}$ → Resuelves $\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{11} = \frac{18}{55}$.

Respuesta: El resultado de $\frac{A}{B}$ es $\frac{18}{55}$, que corresponde al número decimal $0{,}3\overline{27}$.

Atención

Si utilizas solo números decimales en los ejercicios 1 y 2, ¿qué procedimiento emplearías?

La multiplicación o la división de dos números racionales, ¿puede dar como resultado un número entero? ¿Por qué? Comenta con un compañero o una compañera.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Resuelve cada operación según corresponda.

a. Si $X = -\frac{6}{5}$, $Y = 2{,}5$, calcula $X \cdot Y$.

b. Si $Z = 2{,}\overline{5}$, $W = \frac{7}{6}$, calcula $\frac{W}{Z}$.

c. Si $C = 1\frac{7}{9}$, $D = 2\frac{1}{7}$, calcula $C \cdot D$.

d. Si $M = -0{,}1\overline{4}$, $L = 3\frac{1}{5}$, calcula $\frac{M}{L}$.

2. Completa cada recuadro según corresponda.

a. $\frac{2}{9} \xrightarrow{:\,3} \square \xrightarrow{\cdot\,3} \square \xrightarrow{:\,(-5)} \square \xrightarrow{\cdot\,(-5)} \square$

b. $-0{,}5 \xrightarrow{\cdot\,1{,}2} \square \xrightarrow{:\,\frac{6}{5}} \square \xrightarrow{:\,-0{,}2} \square \xrightarrow{\cdot\,\frac{1}{8}} \square$

c. $2{,}\overline{3} \xrightarrow{:\,-\frac{7}{3}} \square \xrightarrow{\cdot\,3\frac{1}{5}} \square \xrightarrow{:\,0{,}1} \square \xrightarrow{\cdot\,-10} \square$

3. Completa cada representación según la clave entregada.

Clave

$a \cdot b$	
a	b

a.

3,1	–2	4,2	–5

b.

$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{4}{9}$

c.

$\frac{23}{18}$			
$2{,}\overline{5}$		0,75	$\frac{8}{3}$

d.

$\frac{19}{1\,215}$			
$\frac{19}{81}$			
	$\frac{1}{9}$		0,4

4. **Representa cada expresión del lenguaje natural en una expresión numérica y luego calcula su valor.**

a. El producto entre la suma de tres y cuatro con la diferencia de siete y nueve.

b. La suma del producto entre cinco y menos cuatro y el cociente entre dos y ocho.

c. La resta del cociente entre menos diez y cinco con el producto entre cuatro y veinte.

d. El cociente entre el inverso aditivo de diez con el inverso multiplicativo de cuatro.

5. **Resuelve los siguientes problemas.**

a. Jesús y Magdalena tienen un bidón con $6\frac{1}{2}$ L de agua y además vasos de 0,25 L. Jesús afirma que puede llenar 30 vasos, en cambio Magdalena dice que son cuatro vasos menos. ¿Quién está en lo correcto? Explica tu respuesta.

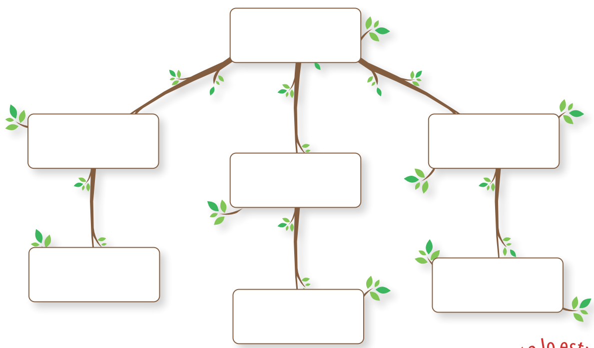
b. Sara y Fernando viajaron a un parque nacional a participar en labores de limpieza, pues les gusta colaborar con la conservación de la naturaleza. Gastaron $\frac{2}{21}$ del dinero que llevaban en la compra de un protector solar y $\frac{3}{11}$ en pasajes de autobús.

- Si tenían $ 75 000, aproximadamente ¿cuánto dinero gastaron en la compra del protector solar y de los pasajes, respectivamente?
- Sara usó $\frac{70}{123}$ del dinero sobrante para comprar 2 almuerzos, aproximadamente, ¿cuánto dinero costó cada almuerzo?

6. **Dados los siguientes números racionales.**

$\frac{7}{4}$; $-0,\overline{3}$; 0,75; $\frac{3}{10}$; $\frac{14}{20}$; 0,75; $\frac{7}{10}$

Ubícalos en cada recuadro de manera que el producto de cada rama sea igual a $-\frac{7}{40}$.



Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 10 - 11

Reflexiona sobre tu trabajo

- Explica cómo se resuelve una multiplicación y una división entre números racionales.

____

____

- Al revisar el solucionario de tu texto, ¿cometiste algún error en los ejercicios?, ¿qué realizarías para no volver a cometerlo? Explica.

____

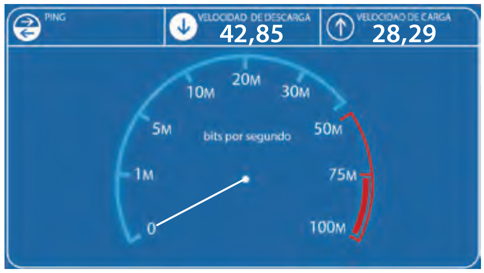
____

Propiedades de la adición y multiplicación de números racionales

Objetivo

- Reducir expresiones numéricas aplicando las propiedades de las operaciones en el conjunto de los números racionales.

Para comprobar la velocidad de banda ancha de su *notebook*, Elena realiza un test de velocidad de descarga y velocidad de carga.



Luego de cotizar en diferentes empresas, una le propone aumentar al doble ambas velocidades. Si luego de aumentar al doble se suman ambas velocidades, ¿cuál es su resultado?

- Completa con las cantidades según corresponda.

$$2 \cdot \left(\overset{\text{Velocidad de descarga}}{\boxed{}} + \overset{\text{Velocidad de carga}}{\boxed{}}\right) = 2 \cdot \boxed{} + 2 \cdot \boxed{}$$

$$= \boxed{} + \boxed{}$$

- Responde a la pregunta planteada. ▸ ____________________
- Si primero se hubiese sumado la cantidad entre paréntesis y luego se aumenta al doble, ¿el resultado es el mismo? Explica.

____

____

Conceptos

En el conjunto $\mathbb{Q}$, para la **adición** y **multiplicación** se cumplen las siguientes **propiedades**:

- **Clausura:** Si $a, b \in \mathbb{Q}$ entonces $(a + b) \in \mathbb{Q}$ y $(a \cdot b) \in \mathbb{Q}$.
- **Conmutativa:** Si $a, b \in \mathbb{Q}$ entonces $a + b = b + a$ y $a \cdot b = b \cdot a$.
- **Asociativa:** Si $a, b, c \in \mathbb{Q}$ entonces $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- **Elemento neutro:** Para todo $a \in \mathbb{Q}$ existe un único elemento neutro, tal que:

Neutro aditivo	Neutro multiplicativo
$a + 0 = 0 + a = a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

- **Elemento inverso:** Para todo $a \in \mathbb{Q}$ existe:

Inverso aditivo	Inverso multiplicativo
$-a \in \mathbb{Q}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$	$\frac{1}{a} \in \mathbb{Q}$ $(a \neq 0)$ tal que $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

- **Distributiva:** Si $a, b, c \in \mathbb{Q}$ entonces $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Ejemplo 1

Aplica las propiedades de la adición y calcula el resultado:
$0,3 - 9,1 + 0,\overline{56}$.

Para resolver la operación, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. $0,3 + (-9,1) + 0,\overline{56}$ → Representas como una adición de números racionales.
2. $\frac{3}{10} + \left(-\frac{91}{10}\right) + \frac{56}{99}$ → Representas los números decimales como fracciones.
3. $\left(\frac{3}{10} + \frac{56}{99}\right) + \left(-\frac{91}{10}\right)$ → Aplicas la propiedad asociativa.
4. $\frac{857}{990} + \left(-\frac{91}{10}\right)$ → Resuelves la adición entre fracciones.
5. $\frac{-8\,152}{990}$ → Obtienes el resultado.

Atención

La propiedad conmutativa de la adición (o de la multiplicación) dice que el orden de los sumandos (o de los factores) no altera el resultado.

Mientras que la propiedad asociativa muestra que no importa el orden de agrupación, ya que su resultado no se altera.

Ejemplo 2

Aplica las propiedades de la multiplicación y calcula el resultado:
$0,5 \cdot 1,2 + 9,1 \cdot 0,5$.

Para resolver la operación, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. $0,5 \cdot 1,2 + 0,5 \cdot 9,1$ → Aplicas la propiedad conmutativa para ordenar los factores.
2. $0,5 \cdot (1,2 + 9,1)$ → Aplicas la propiedad distributiva.
3. $0,5 \cdot 10,3$ → Calculas el producto.
4. $5,15$ → Obtienes el resultado.

Habilidad

Al fundamentar conjeturas usando lenguaje matemático están desarrollando la habilidad de **argumentar y comunicar**.

Ejemplo 3

¿Existe el elemento neutro para la sustracción?

Para determinar el neutro de la sustracción debe existir un único número n que al restarlo con un número cualquiera a resulte el mismo número a.

PASO A PASO

1. De lo anterior se deduce que se debe cumplir que $a - n = n - a = a$.
2. De las ecuaciones anteriores, se tiene que:

$$a - n = a \Rightarrow n = 0 \qquad n - a = a \Rightarrow n = 2a$$

3. Ya que el elemento neutro debe ser único, y en este caso se ha demostrado que no. Para la **sustracción no existe un elemento neutro**.

¿En qué conjunto(s) numérico(s) no existe el elemento inverso o el elemento neutro para la adición? ¿Y qué ocurre con el elemento inverso o el elemento neutro para la multiplicación? Comenta con un compañero o una compañera.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Completa con = (igual) o ≠ (distinto) según corresponda.

a. $\frac{4}{7}+\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{10}\right)$ ◯ $\left(\frac{4}{7}+\frac{3}{5}\right)+\frac{1}{10}$

b. $\frac{2}{7}+\left(-\frac{5}{8}+0,\overline{7}\right)$ ◯ $\left(\frac{2}{7}\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)\right)\cdot 0,\overline{7}$

c. $0,4+(-0,4)$ ◯ $(-0,4)+0,4$

d. $\frac{4}{5}\cdot 1,75$ ◯ $1,75\cdot\frac{4}{5}$

e. $3,5\cdot(-2)-1,1\cdot 2$ ◯ $(3,5-1,1)\cdot 2$

f. $\frac{3}{7}\cdot\left(3,2+\frac{1}{2}\right)$ ◯ $\frac{3}{7}\cdot 3,2+\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}$

2. Completa con el nombre de la propiedad que se utilizó en cada paso de la resolución.

a. $1,2\cdot\frac{4}{9}+1,2\cdot\frac{5}{9}$

$=1,2\cdot\left(\frac{4}{9}+\frac{5}{9}\right)$ ▶ ________________

$=1,2\cdot 1$ ▶ ________________

$=1\cdot 1,2$ ▶ ________________

$=1,2$ ▶ ________________

b. $\frac{8}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}$

$=\left(\frac{8}{10}+\frac{2}{10}\right)+\frac{1}{10}$ ▶ ________________

$=1+\frac{1}{10}$

$=\frac{1}{10}+1$ ▶ ________________

$=\frac{11}{10}$

3. Responde.

a. Al sumar dos números naturales, ¿su resultado es un número natural?

b. Si se restan dos fracciones, ¿su resultado es una fracción?

c. Si sumas o restas dos números racionales, ¿su resultado es un número racional?

d. Al multiplicar dos números naturales, ¿su resultado es un número natural? ¿Qué se obtiene si se dividen dos números naturales?

e. Si se multiplican o dividen dos fracciones, ¿su resultado es siempre un número entero?

f. Si se multiplican o dividen dos números racionales, ¿su resultado es un número racional?

4. Escribe V si la afirmación es verdadera o F si es falsa. Justifica las falsas.

a. ◯ Si $a\in\mathbb{N}$ y $b\in\mathbb{Q}$, entonces siempre ocurre que $a+b\in\mathbb{N}$.

b. ◯ Si $a\in\mathbb{Z}$ y $b\in\mathbb{Q}$, entonces siempre ocurre que $a\cdot b\in\mathbb{Z}$.

c. ◯ Si $a=0$ y $b\in\mathbb{Q}$, entonces siempre ocurre que $a+b=0$.

d. ◯ Si $a\in\mathbb{N}$, $b\in\mathbb{Z}$ y $c\in\mathbb{Q}$, entonces siempre ocurre que $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

5. **Lee la siguiente información, sigue el ejemplo y luego para cada par de números racionales intercala tres números decimales.**

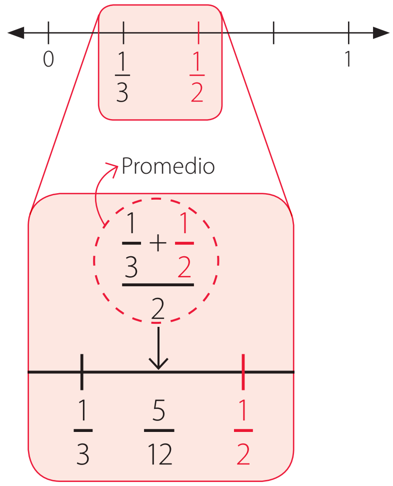
Siempre es posible ubicar un número racional entre dos números racionales distintos, por muy "cerca" que estén.

Por ejemplo, al ubicar una fracción entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, puedes calcular el promedio, es decir:

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{5}{6}}{2} = \frac{5}{12}$$

Luego esta fracción puedes ubicarla en la mitad de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, como se muestra en la recta numérica.

Gracias a la **densidad de los números racionales** siempre puedes encontrar otro número racional entre dos números racionales distintos por muy cercanos que se encuentren.



a. $-\frac{3}{5}, -0{,}4$ **b.** $\frac{5}{12}, \frac{9}{12}$ **c.** $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ **d.** $-0{,}7\overline{3}, -\frac{6}{15}$ **e.** $-\frac{1}{6}, -\frac{1}{7}$ **f.** $0{,}99, \frac{100}{99}$

6. **Comenta con un compañero o una compañera lo siguiente: la propiedad descrita en el ítem anterior, ¿se puede aplicar a los números naturales? ¿Y a los números enteros? Argumenten sus ideas.**

7. Álgebra **Demuestra la propiedad de la clausura para la multiplicación de números racionales. Para esto utiliza la demostración de la clausura de la adición de números racionales, que se presenta como ejemplo.**

Si a y b son números racionales distintos de cero, tales que $a + b = c$, hay que demostrar que c es un número racional. Por definición de un número racional, $a = \frac{x}{y}$ y $b = \frac{z}{w}$, con x, y, w, z números enteros distintos de cero. Su adición es:

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{xw + zy}{yw} = c$$

Hay que demostrar que c es un número racional. Como la adición y la multiplicación de números enteros da como resultado un número entero, entonces $xw + zy$ es un número entero, además yw es un número entero distinto de cero. Por lo tanto, c es un número racional por ser el cociente de números enteros.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 12 - 13

Reflexiona sobre tu trabajo

- Explica con tus palabras las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva.

____

- ¿Cómo planificaste tu trabajo en las actividades que has desarrollado? Explica.

____

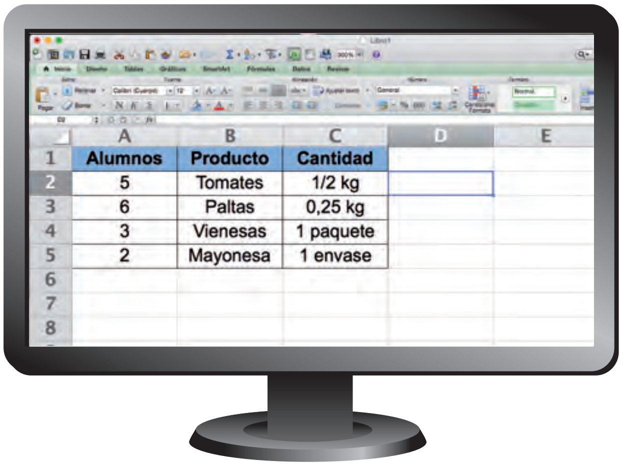
Operaciones combinadas

Objetivo

- Realizar operaciones mixtas con números racionales, respetando la jerarquía de las operaciones y los paréntesis.

Un 1º medio planifica realizar una completada para juntar dinero y de esta forma ayudar a un compañero. El pan y algunos aderezos fueron donados, el resto se cotizó y se obtuvo lo siguiente:

Para ordenar cada uno de los aportes, los estudiantes lo registraron en una planilla de cálculo.



	A	B	C	D	E
1	Alumnos	Producto	Cantidad		
2	5	Tomates	1/2 kg		
3	6	Paltas	0,25 kg		
4	3	Vienesas	1 paquete		
5	2	Mayonesa	1 envase		
6					
7					
8					

Actitud

Cuando realices cálculos, busca y corrige tus posibles errores.

¿Cuánto dinero gastaron en total los estudiantes que colaboraron?

- Completa con los resultados que corresponden.

$$\overbrace{5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 400}^{\text{Tomates}} + \overbrace{6 \cdot 0,5 \cdot 900}^{\text{Paltas}} + \overbrace{3 \cdot 1\,800}^{\text{Vienesas}} + \overbrace{2 \cdot 900}^{\text{Mayonesa}}$$

$$\square \cdot \square + \square \cdot \square + \square + \square$$

$$\square + \square + \square + \square$$

$$\square$$

- Escribe la respuesta del problema.

____

En muchas situaciones cotidianas es necesario realizar operaciones combinadas que involucran números racionales, como es el caso de la actividad inicial. En el cuadro de conceptos se describe cómo realizar **operaciones combinadas**.

Conceptos

Para resolver una **operación combinada**, resuelves en el siguiente orden:

1. Las operaciones que están en los paréntesis desde el más interior hasta el más exterior, de izquierda a derecha.
2. Las potencias.
3. Las multiplicaciones o las divisiones, de izquierda a derecha.
4. Las adiciones o las sustracciones.

Ejemplo 1

Calcula el resultado de la siguiente expresión.

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}-0,\overline{4}\right)-2\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5}\right)-\left(4^2-\frac{3}{5}:0,2\right)$$

PASO A PASO

1 Resuelves los paréntesis por separado.

$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}-0,\overline{4}\right)=\frac{1}{5}-0,\overline{4}$ → Resuelves la multiplicación.

$=\frac{1}{5}-\frac{4}{9}$ → Conviertes el decimal en fracción.

$=\frac{9-20}{45}=-\frac{11}{45}$ → Calculas la resta.

$2\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5}\right)=2\cdot\left(\frac{15+2}{10}\right)=2\cdot\left(\frac{17}{10}\right)$ → Resuelves la adición del paréntesis.

$=\frac{17}{5}$ → Resuelves la multiplicación.

$\left(4^2-\frac{3}{5}:0,2\right)=\left(16-\frac{3}{5}:\frac{2}{10}\right)$ → Resuelves la potencia.

$=(16-3)$ → Resuelves la división.

$=13$ → Calculas la resta.

2 Remplazas los resultados y calculas las operaciones correspondientes.

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}-0,\overline{4}\right)-2\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5}\right)-\left(4^2-\frac{3}{5}:0,2\right)=-\frac{11}{45}-\frac{17}{5}-13$$

$=\left(-\frac{11}{45}\right)+\left(-\frac{17}{5}\right)+(-13)$ → Escribes como una adición de números racionales.

$=\frac{(-11\cdot 5)+(-17\cdot 45)}{45\cdot 5}+(-13)$ → Resuelves la adición de fracciones negativas.

$=\frac{(-55)+(-765)}{45\cdot 5}+(-13)$ → Calculas los productos del numerador.

$=\frac{-820}{225}+(-13)=\frac{(-820)+(-13\cdot 225)}{225}$ → Resuelves la adición de fracciones.

$=\frac{-3\,745}{225}$

Atención

La expresión 4^2 corresponde a una potencia y representa la multiplicación $4\cdot 4=16$.

En el tema 2 de esta unidad estudiarás las potencias de base racional y exponente entero, extendiendo lo que estudiaste en años anteriores.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Realiza las operaciones. Expresa tu resultado como una fracción irreductible.

a. $\frac{1}{3}-\left[\frac{1}{5}\cdot\left(\left[\frac{1}{3}-\frac{5}{2}\right]+0{,}3\right)\right]$

b. $\left[\left(10\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)+\frac{154}{17}\right]\cdot\frac{1}{2}$

c. $\dfrac{2^2+\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}-\frac{169}{28}}$

d. $\dfrac{3-1\frac{2}{3}}{\frac{3}{5}-\frac{1}{10}}$

e. $\left[\left(\frac{-7}{15}+0{,}\overline{9}+\frac{1}{5}\right):\left(7^2-\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{251}{195}$

f. $\left[\frac{11}{7}:\left(\frac{1}{7}-\frac{5}{2}\right)+[-7]\right]:\frac{3}{4}$

g. $\dfrac{0{,}025:(5+0{,}\overline{9})}{\frac{11}{20}-\frac{131}{240}}$

h. $\left[\dfrac{\left(2+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{5}{5}}{\frac{5}{7}-\frac{6}{28}}\right]$

2. Completa la tabla según corresponda.

a	b	c	$(a - b \cdot [c + a])$	$([a - b] \cdot [c + a])$
0,15	$\frac{5}{7}$	0,1		
$\frac{4}{3}$	$-1{,}\overline{5}$	0,001		
$0{,}\overline{14}$	$1\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{5}$		

3. Álgebra Escribe numéricamente las siguientes expresiones y calcula el resultado.

a. Resta el cuadrado del número 5 al doble de la suma de $\frac{3}{7}$ y $\frac{9}{10}$.

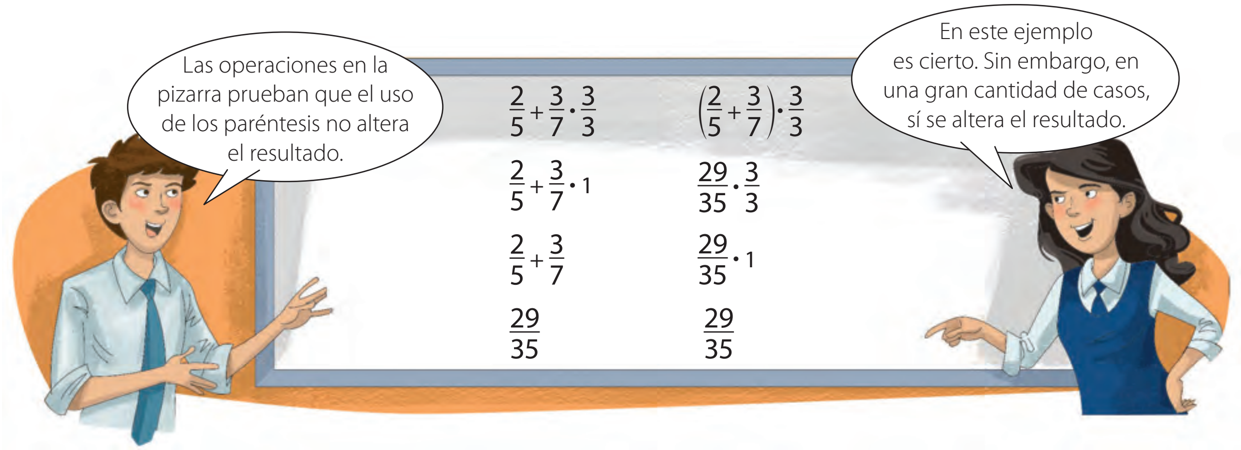
b. Divide el cuadrado de la diferencia entre 17 y 5 por el triple de la suma de 5 y 3.

c. Tres veces la suma de 0,7 y 2,3 se disminuye por el cuádruple de la diferencia de 8,7 y 5,2.

d. El producto entre el número 8 y la suma de sus primeros dos sucesores se aumenta en el triple de la diferencia de 115,7 y 7,7.

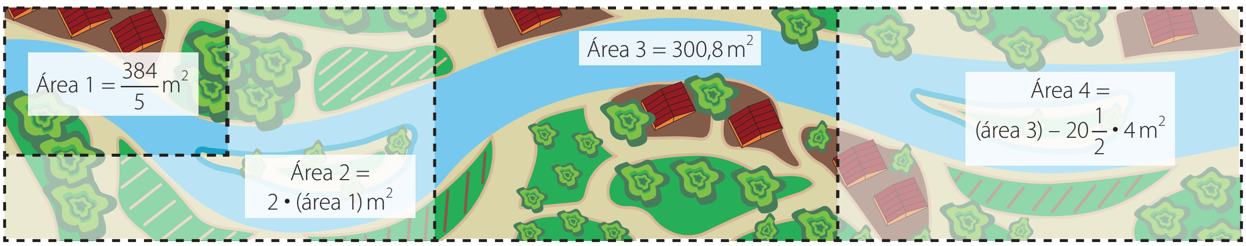
e. El doble de un quinto disminuido en el triple de cuatro novenos.

4. La profesora de Matemática pidió a Alejandro y a Claudia que expliquen la razón del uso de paréntesis para resolver operaciones combinadas.



¿Quién está en lo correcto? ¿Por qué? Da un ejemplo que apoye su respuesta.

5. Estudiantes de 1º medio limpiaron los alrededores de un río. El área total por limpiar fue dividida en 4 más pequeñas para distribuir el trabajo en grupos.



a. Calcula el área total que limpiaron los estudiantes.

b. Determina, con una calculadora, qué fracción del área total limpió cada equipo y súmalas. ¿Cuál fue el resultado? ¿Por qué crees que se obtuvo ese resultado?

c. Elabora junto con tres compañeros un diagrama que muestre las principales áreas verdes de su colegio. Determinen cuáles se pueden limpiar para sembrar plantas o árboles. Comenten por qué es necesario que lleven a cabo este tipo de acciones.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 14 - 15

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Cuál es la mayor dificultad que tuviste al realizar operaciones combinadas?

____

____

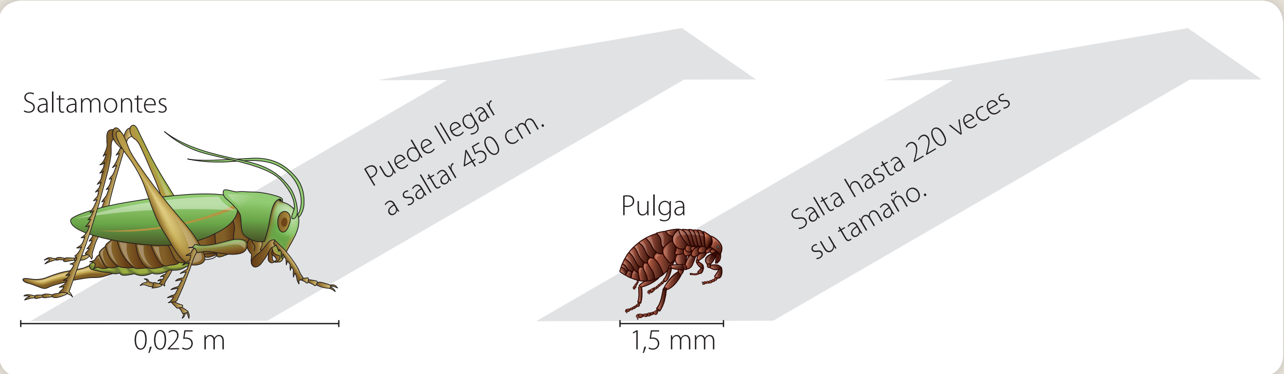
- Cuando efectuaste operaciones combinadas, ¿buscaste errores en tus cálculos? ¿Los corregiste? ¿Cuál fue tu mayor error?

____

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 1

Desarrolla las siguientes actividades de evaluación que te permitirán reconocer lo que has estudiado en este tema.

1. Biología En la imagen se muestra la longitud aproximada de un saltamontes y la de una pulga.



a. ¿A qué conjunto numérico pertenece cada uno de los números que aparecen en la imagen? (2 puntos)

____

b. ¿Cuántas veces su tamaño puede saltar un saltamontes? (3 puntos)

Realiza tus cálculos

Respuesta ▸ ______________________________

c. Al expresar en metros los saltos de una pulga y de un saltamontes, ¿cuánto suman las distancias que alcanzan? Exprésalo simbólicamente y luego resuelve. (3 puntos)

Realiza tus cálculos

Respuesta ▸ ______________________________

d. La suma de las distancias del ítem anterior, ¿es un número entero? Explica. (2 puntos)

____

e. Si el saltamontes y la pulga saltan dos veces, ¿qué expresiones permiten calcular la suma de las distancias recorridas? Explica qué propiedad las relaciona. (2 puntos)

I. $2 \cdot (4{,}5 + 0{,}33)$ m II. $(2 \cdot 4{,}5 + 0{,}33)$ m III. $(4{,}5 \cdot 2 + 0{,}33 \cdot 2)$ m

Explicación ▸ ______________________________

2. En la imagen se muestran algunas monedas que se usan en Estados Unidos y sus equivalencias.

1 dólar

50 centavos

50 centavos = 0,5 dólar

Quarter

1 quarter
= 25 centavos = 0,25 dólar

Usa los datos para **crear** y resolver un problema que involucre una operación combinada. Luego, resuélvela utilizando las propiedades de la adición y multiplicación de números racionales. (4 puntos)

Problema ▸ ______________________________

Resolución 1

Resolución 2

Respuesta ▸ ______________________________

Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1a y 1d	Identifican el conjunto numérico al que pertenece cada número.		**Logrado:** 10 puntos o más. **Medianamente logrado:** 8 a 9 puntos. **Por lograr:** 7 puntos o menos.
1b y 1c	Resuelven operaciones mixtas con números racionales.		
1e y 2	Aplican las propiedades de la adición y multiplicación de números racionales.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Utilizaste la estrategia que planteaste al inicio de este tema? ¿Cuáles otras usaste?

  ____

- ¿Has cumplido tus metas iniciales? ¿Qué has hecho para cumplirlas? ¿Qué debes mejorar?

  ____

- ¿Cómo resolviste las dificultades que se presentaron en el transcurso del tema?

  ____