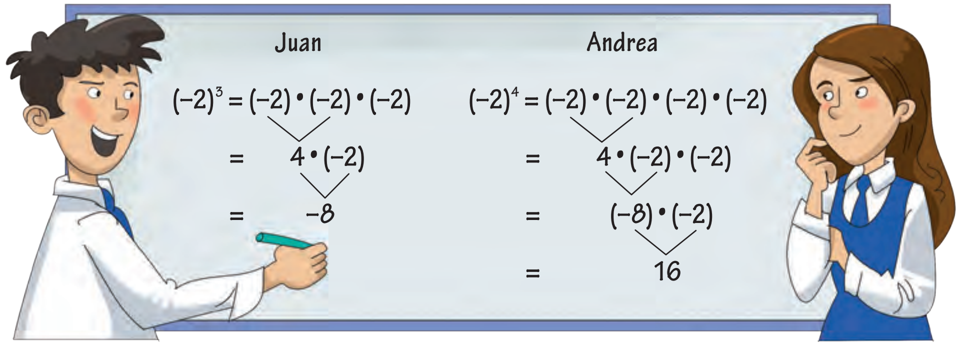
Potencias de base y exponente entero

Objetivos

- Comprender las potencias cuya base y exponente son números enteros.
- Comprender el significado del exponente 0 y de los exponentes enteros negativos.

Juan y Andrea resuelven ejercicios de potencias.



Su profesor lo revisa y les dice que ambos cálculos están correctos:

- Comprueba los cálculos usando la calculadora.
- ¿Qué relación observas entre cada potencia y su resultado? Explica.

____

____

Actitud

Cuando trabajes en equipo, recuerda respetar y valorar las opiniones de los demás.

Completa la siguiente tabla y luego responde.

Potencia	Multiplicación iterada	Resultado	¿Exponente par o impar?	Signo del resultado
$(-2)^5$				
$(-2)^6$				
$(-3)^4$				
$(-3)^5$				
$(-1)^7$				
$(-1)^8$				

- ¿Qué signo tiene el resultado de una potencia cuya base es un número negativo? ¿Depende del exponente? Comenta con un compañero o una compañera.

____

____

Habilidad

Cuando elaboras esquemas o tablas para dar respuesta a distintas situaciones estás desarrollando la habilidad de **representar**.

Al igual que las potencias que tienen como base un número natural, las potencias que tienen como base un número entero negativo y exponente natural se pueden considerar como una multiplicación iterada.

Conceptos

- Una **potencia** cuya base es un **número entero negativo** dará como resultado un número positivo si el exponente es par, y dará como resultado un número negativo si el exponente es impar.
- Al representar simbólicamente esta relación, se tiene que: Si $a \in \mathbb{Z}^-$ y $n \in \mathbb{N}$, se cumple que:
  - Si n es par, entonces $a^n > 0$.
  - Si n es impar, entonces $a^n < 0$.

Atención

Recuerda la **regla de los signos para la multiplicación** de números enteros.

$+ \cdot + = +$ $\quad + \cdot - = -$

$- \cdot - = +$ $\quad - \cdot + = -$

Ejemplo 1

¿El resultado de -5^4 es igual que el de $(-5)^4$?

Para responder a la pregunta, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. Calculas por separado ambas potencias.

$$\begin{aligned} -5^4 = -(5^4) &= -(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \\ &= -(25 \cdot 5 \cdot 5) \\ &= -(125 \cdot 5) \\ &= -625 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (-5)^4 &= (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \\ &= 25 \cdot (-5) \cdot (-5) \\ &= -125 \cdot (-5) \\ &= 625 \end{aligned}$$

2. En el desarrollo de la potencia del lado izquierdo se observa que el signo de la potencia en todo el desarrollo es negativo.

3. En el lado derecho se observa que el signo de la potencia influye en cada una de las multiplicaciones.

Respuesta: El resultado de -5^4 es distinto al de $(-5)^4$.

Conceptos

Cuando el **exponente de una potencia es 0**, su resultado es 1 siempre que la base de la potencia no sea 0.

Simbólicamente: Si $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$ entonces $a^0 = 1$.

Atención

$\mathbb{Z} - \{0\}$ significa que se considera el conjunto de los números enteros pero menos el cero.

Ejemplo 2

Verifica con un ejemplo que $a^0 = 1$ para $a \neq 0$.

Se utilizará $a = 3$, entonces se tiene que la división $3 : 3 = 1$, que se escribe como $3^1 : 3^1$ usando potencias.

Luego al aplicar la regla de la división de potencias de igual base se tiene:

$$1 = 3^1 : 3^1 = 3^{1-1} = 3^0$$

Por lo tanto $3^0 = 1$, es decir, se verifica la propiedad.

En vez de usar la base 3 si se utiliza una base negativa o cualquier otra base distinta de cero, ¿cómo desarrollarías el ejemplo? Comenta con un compañero o una compañera.

Hasta ahora has calculado potencias con exponente positivo, pero ¿qué sucede si el exponente es un número negativo? Por ejemplo, calculemos el valor de 2^{-3}.

Observa lo siguiente:

$$2^{-3} = 2^{0-3} = \frac{2^0}{2^3} = \frac{1}{2^3}$$

Entonces, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

- ¿Se utilizó alguna propiedad de potencia? Explica.

____

____

Conceptos

Si el **exponente de una potencia de base natural** es un número entero negativo, su valor será igual al del inverso multiplicativo de la potencia cuyo exponente es positivo.

Simbólicamente: Si $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{N}$, entonces $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Esta propiedad también se cumple si la base de la potencia es un número entero distinto de cero.

Ejemplo 3

Calcula el cociente entre 3^7 y 3^9 y escríbelo como potencia.

Para resolver el problema, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. Escribes el valor de cada potencia.

Valor de 3^7.

$3^7 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2\,187$

Valor de 3^9.

$3^9 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 19\,683.$

2. Calculas el cociente empleando la regla de la división de potencias de igual base y usando sus valores.

Usando potencias

$$2\,187 : 19\,683 = 3^7 : 3^9 = 3^{7-9} = 3^{-2}$$

Usando valores

$$2\,187 : 19\,683 = \frac{2\,187}{19\,683} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$$

3. Igualas los dos resultados y obtienes que $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$.

Por lo tanto, $3^7 : 3^9 = 2\,187 : 19\,683 = 3^{-2}$.

- ¿Es correcto afirmar que siempre se cumple que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la importancia del conjunto numérico al que pertenecen a y n?

Ejemplo 4

Calcula el valor de $(-2)^{-4}$ y de $(-3)^{-3}$.

- $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4}$ → Aplicas la regla de una potencia de exponente negativo.

  $= \frac{1}{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}$ → Desarrollas la potencia.

  $= \frac{1}{4 \cdot 4} = \frac{1}{16}$ → Multiplicas, en el denominador, los números enteros de a pares siguiendo la regla de los signos.

  $= \frac{1}{2^4}$ → Escribes el denominador como potencia.

- $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3}$ → Aplicas la regla de una potencia de exponente negativo.

  $= \frac{1}{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)}$ → Desarrollas la potencia.

  $= \frac{1}{9 \cdot (-3)} = \frac{1}{-27}$ → Multiplicas, en el denominador, los números enteros de a pares siguiendo la regla de los signos.

  $= -\frac{1}{27}$

  $= -\frac{1}{3^3}$ → Escribes el denominador como una potencia.

Por lo tanto, $(-2)^{-4} = \frac{1}{2^4}$ y $(-3)^{-3} = -\frac{1}{3^3}$.

¿Cómo se puede expresar una fracción cuyo denominador es una potencia de exponente negativo? Comenta con un compañero o una compañera.

Ejemplo 5

Usa las propiedades de las potencias de base entera para simplificar la expresión algebraica y escribirla como potencia. Considera que $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

$$\frac{a^2 \cdot b^2 \cdot b^3 \cdot c^4}{c \cdot a^2 \cdot b^5 \cdot c^3}$$

Para simplificar la expresión, puedes seguir estos pasos:

$\frac{a^2 \cdot b^{2+3} \cdot c^4}{a^2 \cdot b^5 \cdot c^{1+3}} = \frac{a^2 \cdot b^5 \cdot c^4}{a^2 \cdot b^5 \cdot c^4}$ → Aplicas la propiedad de multiplicación de potencias de igual base.

$= \frac{a^2}{a^2} \cdot \frac{b^5}{b^5} \cdot \frac{c^4}{c^4}$ → Escribes como producto de fracciones.

$= a^{2-2} \cdot b^{5-5} \cdot c^{4-4}$ → Aplicas la propiedad de la división de potencias.

$= a^0 \cdot b^0 \cdot c^0$ → Aplicas la propiedad de las potencias con exponente cero.

$= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

¿Cómo explicarías usando argumentos matemáticos que el valor de una potencia de exponente 0 es 1? Explica con tus palabras.

Atención

Cuando el exponente de una potencia no se anota, se asume que es 1, es decir, $a = a^1$.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Escribe positivo o negativo, dependiendo del valor de cada potencia.

a. $(-6)^7$ **c.** $(-5)^4$ **e.** 18^5

b. 8^3 **d.** -6^7 **f.** 2^3

2. Representa los siguientes productos como potencias.

a. $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$

b. $-(4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4)$

c. $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$

d. $(-8) \cdot (-8) \cdot (-8)$

e. $-(8 \cdot 8 \cdot 8)$

f. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

3. Escribe cada potencia como un producto de factores iguales.

a. -3^6 **c.** 8^4 **e.** -7^3

b. $(-11)^2$ **d.** 2^3 **f.** $-(15)^2$

4. Realiza las siguientes operaciones aplicando las propiedades de las potencias.

a. $\dfrac{(-3)^3 \cdot (-5)^2}{225}$ **b.** $\dfrac{(-5^{-2}) \cdot (5^4) \cdot (125)^{-1}}{25 \cdot 5^{-2}}$ **c.** $\dfrac{(3^2) \cdot (3^4) \cdot (-27)^{-1}}{81 \cdot 243^{-1}}$

5. Calcula el valor de las siguientes potencias.

a. 5^4 **c.** 1^{12} **e.** $(-3)^5$

b. -4^4 **d.** 10^4 **f.** -12^2

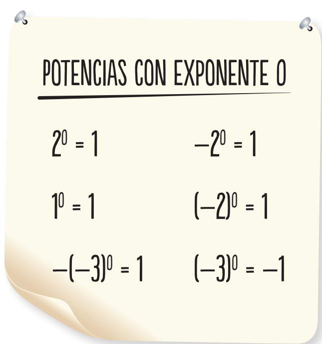
6. Explica si cada igualdad es correcta o no. Corrige las incorrectas.

a. $-7^5 = 16\,807$ **c.** $8^4 = \dfrac{1}{8^{-4}}$ **e.** $-7^2 + (-2)^3 = -57$

b. $-5^{-4} = -\dfrac{1}{5^4}$ **d.** $2^{-3} = \dfrac{1}{9}$ **f.** $\dfrac{1}{2^{-3}} = 6$

7. Lee y responde.

La profesora de Matemática pidió a sus estudiantes, como tarea, que anotaran en un cartel 6 potencias con exponente 0 y sus respectivos resultados. Andrés elaboró el cartel que se muestra. ¿Cuáles de las igualdades son incorrectas? Explica.



8. Resuelve los siguientes problemas.

a. Don Pedro instaló un tanque cúbico en su casa para almacenar agua. Si la arista del tanque es de 8 dm, ¿qué potencia representa al volumen de ese tanque?

b. Carlos y David jugaron 5 partidas de ajedrez, de las que David ganó 3. Carlos le preguntó a su amigo qué quería como premio. David, que es aficionado a la Matemática y le gustan mucho las frutas, le pidió que le llevara naranjas:

– Sí, está bien. ¿Cuántas quieres? —preguntó Carlos.

– Quiero que me traigas 1 por la primera casilla del tablero de ajedrez, 2 por la segunda, 4 por la tercera y así sucesivamente; es decir, en cada casilla el doble de la anterior, hasta la casilla 32.

– Está bien, mañana las traigo —dijo Carlos sin imaginarse lo que le habían pedido.

- Escribe como potencia la cantidad de naranjas que debería llevar Carlos.
- Usa una calculadora científica para determinar esa cantidad de naranjas.

c. Observa la siguiente situación.

- Para colaborar con su amigo y su amiga, Gloria debe decir quién tiene la razón. ¿A quién debe escoger? ¿Qué explicación les podría dar? Comenta con un compañero o una compañera.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Página 16

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué significan el exponente 0 y los exponentes enteros negativos en una potencia?

____

____

- Cuando trabajaste con tus compañeros, ¿respetaste y valoraste sus opiniones? ¿Qué actitud mostraste?

____

____

Potencias de base racional y exponente entero

Objetivos

- Comprender las potencias cuya base es un número racional y el exponente un número entero.
- Reconocer el significado del exponente 0 y de los exponentes enteros negativos.

El **triángulo de Sierpinski** es una estructura que se genera por un proceso recursivo a partir de un triángulo del cual se extraen triángulos de menor tamaño. La secuencia de la construcción es la siguiente:

1° La figura original es un triángulo (Figura 0).

2° La figura siguiente se genera dibujando triángulos con vértices en los puntos medios de los lados y extrayendo el triángulo central.

3° Se repite este proceso en cada triángulo no extraído.

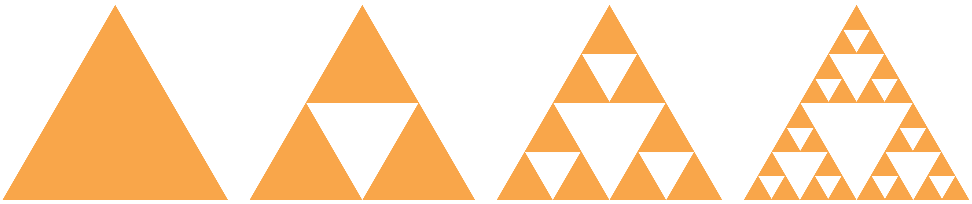


Figura 0 Figura 1 Figura 2 Figura 3

Actitud

Cuando trabajes en grupo, es muy importante que lleves a cabo las actividades aun cuando no te supervisen.

Trabaja y comenta las siguientes preguntas con tus compañeros, considerando que el triángulo usado anteriormente es equilátero.

- Si la medida de los lados del triángulo inicial es 1 cm, ¿cuánto miden los lados de los triángulos más pequeños de las figuras 1, 2 y 3?

___

___

- Escriban los resultados anteriores usando potencias.

___

___

- ¿Cuántos triángulos sin extraer tienen las figuras 1, 2 y 3? Usen potencias para escribir cada resultado.

___

___

___

- ¿Cuántos triángulos de color tendrá la figura 4? Usen potencias para escribir el resultado.

___

___

Habilidad

El uso de expresiones matemáticas para describir situaciones y generalizarlas se relaciona con la habilidad de **modelar**.

- En la actividad anterior pudiste notar que las medidas de los lados de los triángulos se podían escribir como multiplicación iterada. Este resultado motiva el uso de **potencias con base racional** (que puede ser fraccionaria o decimal).

Conceptos

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, la **potencia** de base $\frac{a}{b}$ y exponente n, con $n \in \mathbb{N}$, se define como:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n\text{ - veces}}$$

Como un número racional se puede representar como el cociente de dos números enteros, en el caso de una **potencia de base racional**, se tiene que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo 1

Calcula el valor de las potencias $0{,}5^3$, $\left(-\frac{4}{3}\right)^3$, $\left(-\frac{5}{2}\right)^4$.

- $0{,}5^3 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5$ → Desarrollas la potencia.

  $= 0{,}25 \cdot 0{,}5$ → Multiplicas sucesivamente los números decimales.

  $= 0{,}125$

  Otra manera de calcular el valor de la potencia es expresando los números decimales en su forma fraccionaria:

$$0{,}5^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

- $\left(-\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{-4}{3} \cdot \frac{-4}{3} \cdot \frac{-4}{3}$ → Desarrollas la potencia.

  $= \frac{16}{9} \cdot \frac{-4}{3}$ → Aplicas la propiedad del producto de fracciones respetando la regla de los signos.

  $= \frac{-64}{27}$

- $\left(-\frac{5}{2}\right)^4 = \left(\frac{-5}{2}\right) \cdot \left(\frac{-5}{2}\right) \cdot \left(\frac{-5}{2}\right) \cdot \left(\frac{-5}{2}\right)$ → Desarrollas la potencia.

  $= \frac{25}{4} \cdot \frac{25}{4}$ → Aplicas la propiedad del producto de fracciones respetando la regla de los signos.

  $= \frac{625}{16}$

¿Qué propiedad de las potencias de base entera negativa se podría haber aplicado en las últimas dos potencias del ejemplo 1?

En el **triángulo de Sierpinski**, ¿qué medidas se podrían escribir como potencias de base fraccionaria y exponente natural? Comenta con un compañero o una compañera.

Waclaw Sierpinski

1882 -1969

Fue un matemático polaco que, entre sus aportes, estudió la teoría de la curva que describe un camino cerrado que contiene todos los puntos interiores de un cuadrado.

Atención

Recuerda que:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

con a, b números enteros distintos de cero.

Conceptos

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$.

Ejemplo 2

¿Cuál es el valor de $0,\overline{3}^{-3}$? Justifica tu respuesta aplicando propiedades de potencias de base entera y exponente entero.

Usando directamente la propiedad, se tiene: $0,\overline{3}^{-3} = \left(\frac{3}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{9}{3}\right)^{3} = 3^3 = 27.$

Aplicando las propiedades de las potencias de base entera:

$0,\overline{3}^{-3} = \left(\frac{3}{9}\right)^{-3}$ → Expresas el número decimal periódico en fracción.

$= \frac{3^{-3}}{9^{-3}}$ → Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= 3^{-3} : 9^{-3}$ → Escribes como una división.

$= \frac{1}{3^3} : \frac{1}{9^3}$ → Aplicas la propiedad de la potencia con exponente negativo y base entera.

$= \frac{9^3}{3^3}$ → Calculas la división de fracciones.

$= \left(\frac{9}{3}\right)^{3}$ → Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= 3^3 = 27$

Respuesta: El valor de $0,\overline{3}^{-3}$ es 27.

Atención

Recuerda que para expresar un número decimal periódico en su forma fraccionaria, en el denominador se deben poner tantos nueves como cifras tenga el período, y en el numerador, el número con el período, sin considerar la coma decimal, menos el número formado por la parte entera. Luego, si es el caso, simplificas.

Por ejemplo:

$$0,\overline{3} = \frac{3-0}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$1,\overline{21} = \frac{121-1}{99} = \frac{120}{99} = \frac{40}{33}$$

Para representar números decimales como una fracción, ¿qué otro procedimiento utilizarías?

Conceptos

Una **potencia de base un número racional distinto de cero con exponente 0** es igual a 1.

Simbólicamente: Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^{0} = 1.$

Ejemplo 3

¿Cuál es el valor de $\left(-\frac{2}{7}\right)^{0}$? Justifica tu respuesta aplicando propiedades de potencias que tienen como base entera y exponente un número entero.

Usando directamente la propiedad, se tiene que: $\left(-\frac{2}{7}\right)^{0} = 1.$

Otra manera es usar las propiedades de las potencias de base entera:

$\left(-\frac{2}{7}\right)^{0} = \frac{(-2)^0}{7^0}$ → Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= \frac{1}{1} = 1$ → Aplicas la propiedad de la potencia de exponente 0 y base entera.

Respuesta: El valor de $\left(-\frac{2}{7}\right)^{0}$ es 1.

Conceptos

La propiedad de la **potencia de una potencia** establece que:

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$ y $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$$

Ejemplo 4

Explica por qué $(0,\overline{2}^{-3})^2 = 0,\overline{2}^{-6}$ y luego calcula su valor.

La propiedad se obtiene al multiplicar en forma reiterada cada potencia:

$(0,\overline{2}^{-3})^2 = 0,\overline{2}^{-3} \cdot 0,\overline{2}^{-3}$ → Desarrollas el exponente cuadrado.

$= \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right)^3$ → Aplicas la propiedad de la potencia de exponente negativo.

$= \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right)$ → Desarrollas cada cubo.

$= \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right)^6$ → Escribes el producto como potencia.

$= 0,\overline{2}^{-6}$ → Aplicas la propiedad de la potencia de exponente negativo.

Para calcular el valor podemos, seguir estos pasos:

$(0,\overline{2}^{-3})^2 = 0,\overline{2}^{-3 \cdot 2} = 0,\overline{2}^{-6}$ → Aplicas la propiedad de la potencia de una potencia.

$= \left(\frac{2}{9}\right)^{-6}$ → Expresas el número decimal como una fracción.

$= \left(\frac{9}{2}\right)^{6}$ → Aplicas la propiedad de la potencia con exponente negativo.

$= \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2}$ → Desarrollas la potencia.

$= \frac{531\,441}{64}$ → Calculas el valor de la potencia.

- ¿Por qué crees que, para calcular el valor, se expresó el número decimal periódico en su forma fraccionaria? Explica.
- ¿Siempre se cumple que $[(a^n)^m]^k = a^{n \cdot m \cdot k}$?, ¿qué condiciones deben cumplir a, m, n y k? Justifica tu respuesta y da un ejemplo.

Atención

Generalmente: $(a^n)^m \neq a^{n^m}$

Por ejemplo,

$$(2^3)^2 \neq 2^{3^2}$$

$$2^6 \neq 2^9$$

¿En qué casos crees que se cumple la igualdad?

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Escribe cada potencia con exponente positivo.

a. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$ **b.** $\left(-0{,}4\overline{3}\right)^{-8}$ **c.** $\left(-\frac{10}{9}\right)^{-1}$

2. Calcula el valor de cada potencia.

a. $\left(\frac{2}{5}\right)^{0}$ **c.** $\left(-\frac{3}{8}\right)^{4}$ **e.** $0{,}03^{2}$

b. $\left(\frac{-1}{6}\right)^{3}$ **d.** $0{,}4^{2}$ **f.** $(-0{,}2)^{2}$

3. Remplaza en cada expresión $a = 3$, $b = 2$, $c = -2$, calcula y simplifica cada vez que sea necesario.

a. $\left(\frac{a}{b}\right)^{3} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{c}$ **b.** $\frac{1}{b} + \left[\left(\frac{14}{a}\right)^{-c}\right]^{-1}$ **c.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{b} - \left(\frac{3}{7}\right)^{c} + \frac{1}{a}$

4. Completa para que se cumpla cada igualdad.

a. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{\square} : \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{5}$ **b.** $\left[(0{,}125)^{2}\right]^{\square} = 8^{8}$ **c.** $\left(-\frac{7}{4}\right)^{-3} = \left(-\frac{4}{7}\right)^{\square}$

5. Observa el siguiente desarrollo de propiedades de las potencias presentado por dos alumnos de 1º medio.

Alejandro

Presenta el siguiente desarrollo: $\left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

Beatriz

Presenta el siguiente desarrollo: $\left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

¿Quién tiene la razón? Justifica tu respuesta.

6. Comprueba que se cumplen las siguientes igualdades.

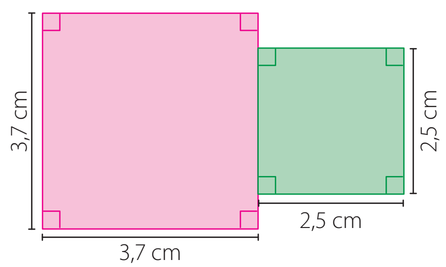
a. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\right]^{3} = 1$ **b.** $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\right]^{3} = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\right]^{2}$

7. Opera de forma separada en ambos lados de la desigualdad para demostrar que la potenciación no es distributiva respecto de la adición y la sustracción.

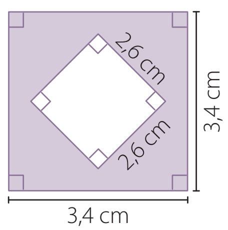
a. $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right)^{2} \neq \left(\frac{1}{3}\right)^{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^{2}$ **b.** $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)^{2} \neq \left(\frac{3}{4}\right)^{2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{2}$

8. Geometría Calcula el área de la región sombreada en cada caso.

a.



b.



9. **Resuelve el siguiente problema.**

La profesora copió la siguiente información en la pizarra: El virus del sida mide aproximadamente $1{,}1 \cdot 10^{-5}$ cm y el de la influenza, $1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^5$ cm aproximadamente. Ella pidió a sus estudiantes que determinen cuál de los dos virus tiene mayor tamaño. Si todos la resolvieron correctamente, ¿cuál fue la respuesta?

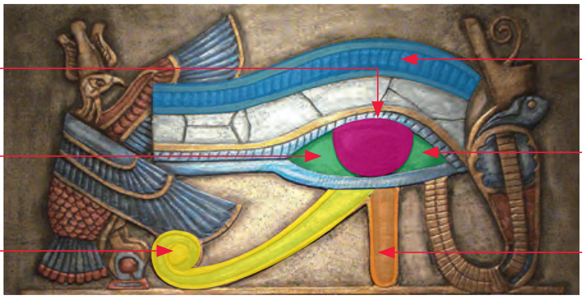
10. **Junto con un compañero o una compañera realicen la siguiente actividad. Consideren el triángulo equilátero de Sierpinski de la página 44.**

a. Si el perímetro de la figura inicial es a, ¿cuánto mide el perímetro de cada uno de los triángulos blancos de las figuras 0, 1 y 2?

b. ¿Cuánto mide el perímetro de cada uno de los triángulos blancos de la figura n?

11. Ciencias Sociales **Analiza la siguiente información y luego responde.**

Cuenta la historia que en una batalla egipcia el ojo de Horus fue seccionado en distintas partes, las cuales fueron denominadas "fracciones del ojo de Horus", como se muestra a continuación:



Pupila $\frac{1}{4}$

Parte derecha de la pupila

Parte inferior diagonal bajo el ojo $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

Cejas

Parte izquierda de la pupila $\frac{1}{2}$

Parte inferior vertical del ojo 2^{-6}

a. La fracción de la parte derecha de la pupila se relaciona con elevar a la cuarta la fracción de la parte izquierda de la pupila, ¿cuál es dicha fracción?

b. Si la ceja corresponde al valor de la potencia 2^{-3}, ¿a cuánto corresponde dicho valor?

c. ¿Cuál es la fracción de la parte inferior vertical bajo el ojo?

d. ¿Cuál de todas las fracciones es la menor? ¿A qué parte del ojo de Horus corresponde?

e. Si todas las fracciones del ojo de Horus se relacionan con la expresión $\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}$, ¿qué valores podría tener n? Explica.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Página 17

Reflexiona sobre tu trabajo

- Explica con tus palabras lo que entiendes por potencia con base racional y exponente entero.

____

- ¿Cómo mejorarías el trabajo grupal con tus compañeros?

____

Multiplicación y división de potencias de base racional

Objetivos

- Aplicar las propiedades de la multiplicación y la división de potencias.
- Resolver problemas de la vida diaria usando potencias de base racional.

Paula contrató los servicios de un jardinero para construir un jardín en un terreno con forma cuadrada que tiene 3,5 m de lado. El jardinero hizo un jardín que ocupaba $\frac{1}{10}$ de la mitad del terreno de Paula. Por el trabajo cobró $ 4 500 por metro cuadrado de jardín construído. ¿Cuánto gastó Paula? ¿Cuántos terrenos con forma cuadrada de 0,2 m de lado se pueden construir en el jardín?

- Explica por qué la siguiente expresión permite responder la primera pregunta.

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3{,}5)^2 \cdot 4\,500$$

- ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a la anterior? Remárcala.

$$\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 7^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4\,500 \qquad \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4\,500$$

- Explica por qué la siguiente expresión permite responder la segunda pregunta.

$$\left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3{,}5)^2\right) : (0{,}2)^2$$

- ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a la anterior? Remárcala.

$$\left[\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (3{,}5)^2\right] : \left(\frac{1}{5}\right)^2 \qquad \left[\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] : \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

- Resuelve y explica cada operación usando propiedades de las potencias de base entera y responde las preguntas del problema.

- En multiplicaciones y divisiones de potencias se pueden usar propiedades para simplificar su cálculo. Estas propiedades se emplean cuando la base o el exponente es el mismo.

Conceptos

Para **multiplicar potencias de igual base racional** y con **exponente entero**, se conserva la base y se suman los exponentes.

Simbólicamente: Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, entonces esta propiedad se expresa como:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}, \text{ donde } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 1

Muestra con un ejemplo la aplicación de la propiedad de la multiplicación de potencias de igual base racional.

Un ejemplo puede ser la multiplicación $\left(-\frac{9}{4}\right)^{3} \cdot \left(-\frac{9}{4}\right)^{5}$.

$\left(-\frac{9}{4}\right)^{3} \cdot \left(-\frac{9}{4}\right)^{5} = \frac{(-9)^3}{4^3} \cdot \frac{(-9)^5}{4^5}$ → Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= \frac{(-9)^3 \cdot (-9)^5}{4^3 \cdot 4^5}$ → Multiplicas fracciones.

$= \frac{(-9)^{3+5}}{4^{3+5}}$ → Aplicas la propiedad de la multiplicación de potencias.

$= \left(\frac{-9}{4}\right)^{3+5}$ → Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

Por lo que queda mostrada la propiedad con un ejemplo.

Atención

Cada número racional se puede expresar como la división de dos números enteros, con el denominador distinto de cero; de esta manera, las propiedades propuestas para las potencias de base un número entero se relacionan con las propiedades de base un número racional.

Conceptos

Para **multiplicar potencias de igual exponente** se conserva el exponente y se multiplican las bases.

Simbólicamente: Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, se tiene:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{n} = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^{n}, \text{ donde } n \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 2

Muestra con un ejemplo la aplicación de la propiedad de la multiplicación de potencias de igual exponente.

Un ejemplo puede ser la multiplicación $\left(-\frac{3}{4}\right)^{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{3}$.

$\left(-\frac{3}{4}\right)^{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{3} = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$ → Escribes las potencias como multiplicación iterada.

$= \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{5}$ → Aplicas la conmutatividad para reordenar los factores.

$= \left(-\frac{6}{20}\right) \cdot \left(-\frac{6}{20}\right) \cdot \left(-\frac{6}{20}\right) = \left(-\frac{6}{20}\right)^{3}$ → Multiplicas cada par de factores y representa como una potencia.

Por lo que queda mostrada la propiedad con un ejemplo.

Las propiedades que has estudiado para la multiplicación de potencias se extienden para la división de potencias de igual base o de igual exponente.

Conceptos

Para **dividir potencias de igual base racional** distinta de 0 y de **exponente entero** se conserva la base, y al exponente del dividendo se le resta el exponente del divisor.

Simbólicamente: Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, esta propiedad se expresa como:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}, \text{ donde } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 3

Muestra con un ejemplo la aplicación de la propiedad de la división de potencias de igual base racional.

Un ejemplo puede ser la división $\left(-\frac{5}{2}\right)^3 : \left(-\frac{5}{2}\right)^5$.

$$\left(-\frac{5}{2}\right)^3 : \left(-\frac{5}{2}\right)^5 = \frac{(-5)^3}{2^3} : \frac{(-5)^5}{2^5}$$ Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$$= \frac{(-5)^3}{2^3} \cdot \frac{2^5}{(-5)^5}$$ Representas la división de fracciones como una multiplicación.

$$= \frac{(-5)^3 \cdot 2^5}{2^3 \cdot (-5)^5}$$ Multiplicas fracciones.

$$= \frac{(-5)^{3-5}}{2^{3-5}}$$ Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual base.

$$= \left(\frac{-5}{2}\right)^{3-5}$$ Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

Por lo tanto, $\left(-\frac{5}{2}\right)^3 : \left(-\frac{5}{2}\right)^5 = \left(\frac{-5}{2}\right)^{3-5}$.

En este ejemplo se aplicaron propiedades de potencias de base entera. ¿Cómo se podría mostrar la propiedad solo usando la interpretación de potencias como multiplicación iterada? Explícale a un compañero o compañera.

Actitud

Recuerda tener una actitud respetuosa cuando trabajes con tus compañeros.

Conceptos

Para **dividir potencias de igual exponente entero** se conserva el exponente y se dividen los números racionales de las bases.

Simbólicamente: Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, entonces esta propiedad se expresa como:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n, \text{ donde } n \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 4

Muestra con un ejemplo la aplicación de la propiedad de la división de potencias de igual exponente y base racional.

Un ejemplo puede ser la división $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{4}{7}\right)^3$.

$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 : \frac{4^3}{7^3}$ → Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{7^3}{4^3}$ → Representas la división de fracciones como una multiplicación.

$= \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^3$ → Escribes el segundo factor como potencia de base racional.

$= \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4}\right)^3$ → Aplicas la propiedad de la multiplicación de potencias de igual exponente.

$= \left(-\frac{2}{3} : \frac{4}{7}\right)^3$ → Escribes el producto como cociente.

$= \left(-\frac{14}{12}\right)^3$ → Calculas la división de fracciones.

Por lo tanto, $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \left(-\frac{14}{12}\right)^3$.

Atención

Las propiedades de la multiplicación y división de potencias de igual exponente con base racional también son aplicables cuando la base es un número entero distinto de cero o un número natural.

Ejemplo 5

Aplica las propiedades de las potencias para simplificar la expresión.

$$\left[\left(\frac{4}{5}\right)^7 : \left(\frac{4}{5}\right)^{10}\right] \cdot \left[\left(-\frac{2}{20}\right)^3 : \left(\frac{5}{2}\right)^3\right]$$

PASO A PASO

1 En el primer paréntesis resuelves una división de potencias de igual base.

$$\left(\frac{4}{5}\right)^7 : \left(\frac{4}{5}\right)^{10} = \left(\frac{4}{5}\right)^{7-10} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3$$

2 En el segundo paréntesis resuelves una división de potencias de igual exponente.

$$\left(-\frac{2}{20}\right)^3 : \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \left(-\frac{2}{20} : \frac{5}{2}\right)^3 = \left(-\frac{2}{20} \cdot \frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{4}{100}\right)^3$$

3 Resuelve la multiplicación.

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{4}{100}\right)^3 = \left[\frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{4}{100}\right)\right]^3 = \left[-\frac{20}{400}\right]^3 = \left[-\frac{1}{20}\right]^3 = -\frac{1}{8\,000}$$

Por lo tanto, $\left[\left(\frac{4}{5}\right)^7 : \left(\frac{4}{5}\right)^{10}\right] \cdot \left[\left(-\frac{2}{20}\right)^3 : \left(\frac{5}{2}\right)^3\right] = -\frac{1}{8\,000}$.

¿Crees que conocer las propiedades de las potencias te ayudará al calculo de su valor? Explica.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Calcula las siguientes multiplicaciones de potencias.

a. $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot (1,\overline{3})^5 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2$

b. $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^2 \cdot 4^8$

c. $\left[1,25^2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3\right]^2$

d. $\left(-\frac{10}{8}\right)^6 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^4 \cdot 0,4^2$

2. Calcula las siguientes operaciones combinadas de potencias.

a. $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$

b. $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 : 0,75^6$

c. $\left(\frac{4}{3}\right)^3 : \left(-\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3$

d. $0,\overline{6}^4 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^3 : \left(-\frac{32}{243}\right)^2$

3. Completa los recuadros de manera que las igualdades sean verdaderas.

a. $\left(\frac{6}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{\square} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^{2+3} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^{\square} = \frac{\square}{\square}$

b. $\left(\frac{-1}{\square}\right)^{\square} : \left(\frac{\square}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^{\square - \square} = \left(\frac{-1}{2}\right)^9 = \frac{\square}{\square}$

4. Comenta con un compañero o una compañera por qué el desarrollo de este ejercicio es incorrecto. Describan el error que se cometió y corríjanlo.

$$2^0 + 2^1 + 2^2 = 2^{0+1+2} = 2^3$$

5. Demuestra cada igualdad utilizando las propiedades estudiadas.

a. $\dfrac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}, \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}, n \in \mathbb{Z}$

b. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}, \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}, n \in \mathbb{Z}$

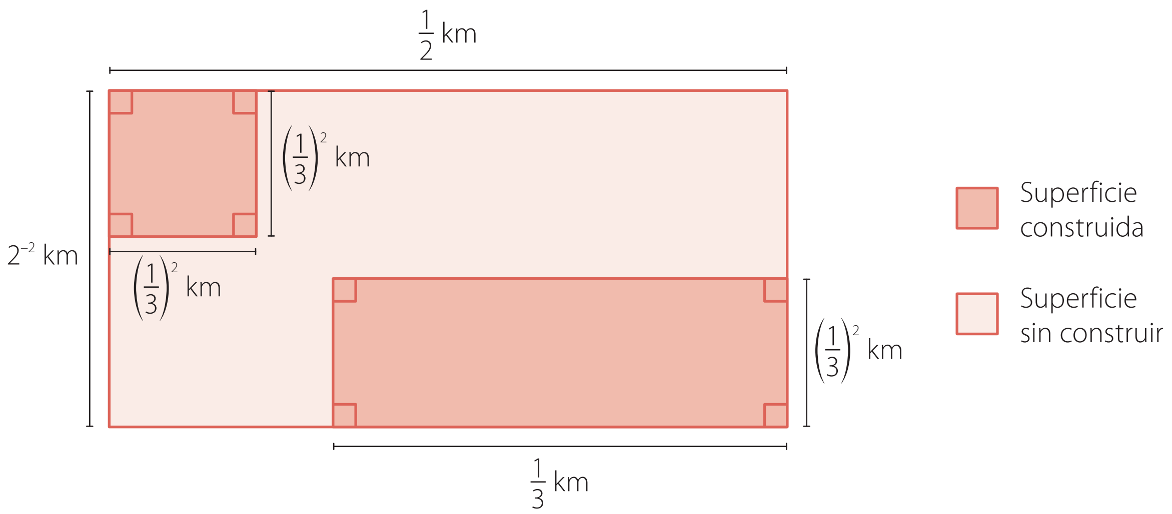
6. Tecnología En telecomunicaciones la directividad (D) de una antena es su capacidad de concentrar las señales y depende del tipo de señal que se transmita. La directividad de una antena de un canal de televisión UHF se calcula con la expresión

$$D = \frac{18}{5} \cdot \frac{1}{L^2}$$

donde la letra L representa una magnitud llamada longitud de onda, que en el caso de las señales UHF está entre $\frac{3}{10}$ m y $\frac{3}{5}$ m. ¿Cuál es la directividad de una antena que emite una señal de $L = \frac{9}{20}$ m?

7. Resuelve los siguientes problemas:

a. Don José quiere comprar un terreno en el que el área sin construir sea mayor que el área construida, ya que piensa sembrar. Abajo se muestra el esquema de una propiedad. ¿Cumple el terreno la condición solicitada por don José? Escribe las operaciones necesarias para justificar tu respuesta.



b. En una división de fracciones, el dividendo es $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$ y el divisor $\left(\frac{1}{2^2}\right)^{-1}$. ¿Cuánto es la mitad del cociente?

c. Danilo le dijo a Rosa que al dividir potencias de igual base racional y con exponente entero se conserva la base y se dividen los exponentes, en vez de restarlos. Para demostrar su afirmación, elaboró lo siguiente.

$$\left(\frac{5}{7}\right)^4 : \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \left(\frac{5}{7}\right)^{4:2} = \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49} \text{ pues } \left(\frac{5}{7}\right)^4 : \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{5^4}{7^4} : \frac{5^2}{7^2} = \frac{625}{2\,401} : \frac{25}{49} = \frac{25}{49}$$

- Explica por qué, en el caso ilustrado en la tarjeta, la afirmación de Danilo sí se cumple. Escribe un ejemplo que contradiga lo que él asegura.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 18 - 19

Reflexiona sobre tu trabajo

- Explica cómo se relacionan las potencias de base entera con las potencias de base racional. Da un ejemplo.

____

____

- ¿Cómo demostraste respeto a tus compañeros en el trabajo en equipo? Explica.

____

____

Crecimiento y decrecimiento exponencial

Objetivo

- Modelar procesos de crecimiento y decrecimiento exponencial en diversos contextos.

Realiza la siguiente actividad con un compañero o una compañera.

Emilia abre una cuenta de ahorro en un banco con \$ 60 000. Todos los meses el banco le da un interés del 1 % de lo que hay en la cuenta. Esto quiere decir que la cantidad que está en la cuenta se multiplica cada mes por 1,01.

- Completa la tabla. Si es necesario, utiliza una calculadora.

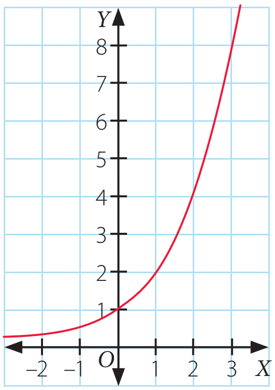
Mes	Dinero (\$)
1	60 000
2	$60\,000 \cdot 1{,}01 =$
3	$(60\,000 \cdot 1{,}01) \cdot 1{,}01 = 60\,000 \cdot 1{,}01^2 =$
4	$(60\,000 \cdot 1{,}01^2) \cdot 1{,}01 = 60\,000 \cdot 1{,}01^3 =$
5	
6	

- ¿Por qué cada mes se debe multiplicar por 1,01? Expliquen.

- ¿Qué expresión matemática permitiría determinar los ahorros de Emilia en el mes 11? ¿y en un mes n?

Atención

Un ejemplo de crecimiento exponencial relacionado con la potencia 2^x es el siguiente gráfico.



- Grafiquen en un procesador de texto (por ejemplo, Word, Openoffice, Libreoffice, entre otros) los ahorros de Emilia. Para esto, sigan estos pasos.

  1° Abran el programa y con el *mouse* seleccionen **Insertar**, luego **Gráfico**. En Gráfico seleccionen **Tipo de gráfico**… y elijan un **gráfico de líneas**; después seleccionen el primer subtipo de gráfico y aparecerá un ejemplo.

  2° Remplacen la columna de categorías por los valores de "Mes" y la serie 1, por los valores de "Dinero (\$)".

  3° Observen que en la primera fila se pueden poner los nombres de las variables, es decir, "Mes" y "Dinero (\$)".

  4° Dependiendo del *software*, es posible cambiar algunas características del gráfico. Indaguen en las opciones que da el programa para hacer modificaciones al gráfico. Por ejemplo, pueden agregar lo siguiente:

  - En Título de gráfico: "Ahorro de Emilia".
  - En Eje de categorías: "Mes".
  - En Eje de valores: "Dinero".

- Describan el gráfico que construyeron.

Habilidad

Cuando usas potencias para describir el crecimiento o el decrecimiento exponencial de alguna situación estás desarrollando la habilidad de **modelar**.

Conceptos

Cuando se modela una situación de **crecimiento exponencial**, la base de la potencia es **mayor que 1**. Por otra parte, cuando la base de la potencia es **menor que 1** y **mayor que cero**, se está modelando un **decrecimiento exponencial**.

Ejemplo 1

La cantidad de masa del elemento radiactivo cesio 137 en un tiempo t (en años) disminuye, aproximadamente, como se muestra en la tabla:

Tiempo	1	2	3	4	5
Cálculo de la masa	10	$10 \cdot 0{,}9773$	$10 \cdot 0{,}9773^2$	$10 \cdot 0{,}9773^3$	$10 \cdot 0{,}9773^4$
Masa (g)	10	9,773	9,551	9,334	9,122

¿Qué cantidad de cesio 137 hay inicialmente?

En la primera columna de la tabla se puede observar la cantidad inicial de cesio 137, que corresponde a 10 g.

¿Qué cantidad de cesio 137 habrá en 80 años?

Para determinar la cantidad de cesio 137 en un año t determinado se debe calcular la expresión $10 \cdot 0{,}9773^{t-1}$.

Cuando $t = 80$, se tiene:

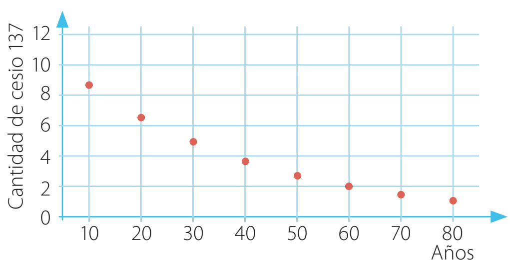
$$10 \cdot 0{,}9773^{80-1}$$

Usando una calculadora científica como la de la imagen, se obtiene que la cantidad de cesio 137 en 80 años es de 1,63 g, aproximadamente.

Grafica algunos valores del decrecimiento de la masa del cesio 137.

Siguiendo los pasos de la actividad inicial, se puede obtener un gráfico como el siguiente:

Cantidad de cesio 137

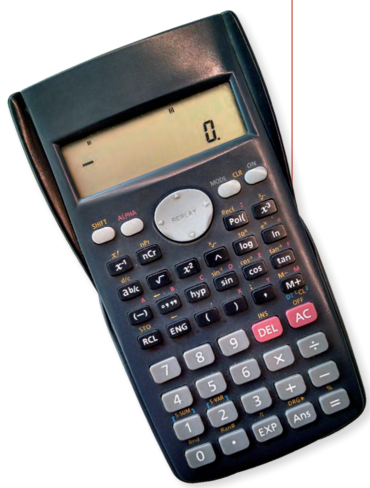


¿En qué se diferencian y asemejan los gráficos de la actividad inicial y el gráfico del ejemplo 1? Comenta con un compañero o una compañera.

Atención

Para realizar el cálculo de la potencia con la calculadora de la imagen se debe teclear lo siguiente:

10 0.9771 80



Conexión con Ciencia

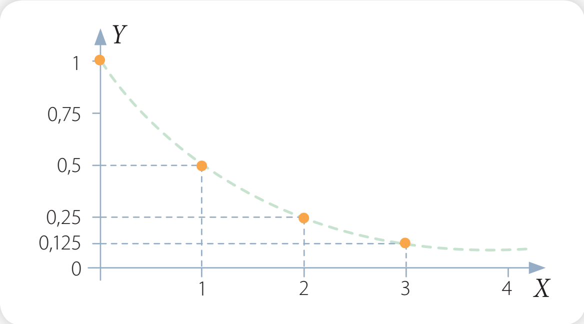
El cesio 137 es una sustancia radiactiva que se utiliza generalmente en la industria y en la medicina.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. **En el transcurso de sus investigaciones un biólogo trazó una curva, la que se asimila a la de un decrecimiento exponencial.**

- Si $x = 0$, entonces $y = 1$
- Si $x = 1$, entonces $y = 0{,}5$
- Si $x = 2$, entonces $y = 0{,}25$
- Si $x = 3$, entonces $y = 0{,}125$



Si $x = 0{,}5$, ¿cuál es el valor de y?
¿Y cuál si $x = 4$?

2. **Resuelve los siguientes problemas.**

a. En una competencia entre cuatro personas, acordaron repartirse como premio $ 240 000, de manera que el primer lugar se lleva el triple del premio del segundo lugar, lo que se extiende al tercer y cuarto lugar. ¿Cuáles son los premios correspondientes a cada uno?

b. Un alfarero recibe, el día lunes, el encargo de hacer 400 vasijas para el viernes, para lo cual habla con sus ayudantes. Pero el martes se retiran enfermos dos de ellos y cada día fabrican dos terceras partes de vasijas del día anterior. Si el último día fabrican 32 vasijas, ¿lograrán terminar la tarea a tiempo?

c. En una población de 10 000 conejos se detectó una epidemia que los está exterminando a razón de $10\,000 \cdot 2^{-t}$, en la que t es el tiempo expresado en días. Después de 3 días, ¿cuántos conejos quedan?

d. Una persona aplaude una vez y, luego, 1 minuto después, vuelve a aplaudir. Espera 3 minutos y aplaude nuevamente; luego lo hace después de 9 min, de 27 min, de 81 min, y así sucesivamente. Esto es, se triplica el intervalo de minutos entre los aplausos sucesivos. Si siguiera haciendo esto durante 6 horas, ¿cuántas veces aplaudiría?

e. Juan decide ahorrar $ 1 000 cada mes en una alcancía. Diego, al ver lo que hacía Juan, decide imitarlo, pero cada mes ahorrará un 10 % más de lo que ahorró el mes anterior. Calcula la cantidad final ahorrada por Juan y Diego después de 5 meses.

f. María observa que en su casa el consumo de energía eléctrica aumenta cada mes en $\frac{1}{5}$ respecto del mes anterior. Si hace tres meses pagaba $ 15 000, ¿cuánto pagó este mes?

3. Ciencias **Una población de bacterias A decrece a la mitad cada semana, mientras que una población B crece en un tercio cada semana. Inicialmente, la población A es de 1 000 bacterias y la población B, de 243.**

a. ¿Cuántas bacterias tiene cada población luego de transcurridos tres semanas?

b. ¿Cuál es el total de las dos poblaciones al cabo de las tres semanas?

4. **Luis es muy responsable con su higiene personal porque sabe que las bacterias se reproducen muy rápido. Él leyó la siguiente información en una revista de salud:**

Las bacterias se reproducen por bipartición: de 1 se forman 2, de 2 se forman 4, de 4 se forman 8, y así cada vez se duplica la cantidad de bacterias.

a. Expresa, como una multiplicación de potencias de igual base, la cantidad de bacterias si inicialmente hay 2 y se reproducen 5 veces.

b. Expresa, como una multiplicación de potencias de igual base, la cantidad de bacterias si inicialmente hay 4 y se reproducen 6 veces.

5. Tecnología **Para una campaña en defensa de los delfines Francisca decidió iniciar una cadena de correos electrónicos. Ella envió a 5 amigos un mensaje en el que daba a conocer la situación de los cetáceos y pedía que cada receptor enviara ese correo a 5 personas más. Para calcular el alcance de la cadena, Francisca elaboró la siguiente tabla:**

Cadena de correos electrónicos						
Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4	Etapa 5	Etapa 6	Etapa 7
5^0	5^1	5^2	5^3			
1	5	25	125			

Para elaborar esta tabla, Francisca consideró como etapa 1 el mensaje que ella escribió; como etapa 2, los 5 textos que después se mandaron; como etapa 3, los correos de sus amigos a otras 5 personas, y así sucesivamente.

a. Completa la tabla anterior hasta la etapa 7 de la cadena.

b. Escribe una potencia que represente cuántos mensajes se han enviado en la etapa 30.

c. Utiliza una calculadora científica para determinar cuántos correos se han enviado en total hasta la etapa 7.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 20 - 21

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Cómo le explicarías a tus compañeros lo que es el crecimiento exponencial?

- Cuando trabajaste en grupo, ¿asumiste responsabilidades? ¿Cuáles? ¿Por qué?

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 2

Desarrolla las siguientes actividades de evaluación que te permitirán reconocer lo que has estudiado en este tema.

1. Lee la situación y responde las preguntas.

Un chef decidió enseñar a cocinar a los habitantes de una ciudad. Como no era posible enseñar a todos los habitantes a la vez, comenzó con 10 (semana 0), cada uno de los cuales se comprometió a instruir a otras 2 personas durante la semana siguiente (o sea, en una semana existen 20 nuevos cocineros que junto con los 10 iniciales hacen un total de 30). Además, cada uno de esos 30 habitantes enseña a otros 2 durante la semana siguiente, y así sucesivamente.

Para responder las preguntas, considera el supuesto de que se les instruye siempre a personas distintas y que ninguno de los habitantes ha fallado en su compromiso.

a. ¿Cuántos nuevos cocineros existen en cada una de las primeras 5 semanas? Explica cómo lo calculaste. (2 puntos)

Realiza tus cálculos

Respuesta ▸ ____________________

b. Escribe el término general de la secuencia de los nuevos cocineros en cada semana (iniciando la secuencia en la semana 1). ¿Se puede escribir como potencia? Justifica tu respuesta. (2 puntos)

Realiza tus cálculos

Respuesta ▸ ____________________

c. Escribe el término general de la secuencia del total de cocineros al final de n semanas. (2 puntos)

____

2. Las siguientes adiciones de fracciones tienen infinitos términos, pero su resultado es un número finito. Determina el resultado de cada una. Sugerencia: representa las fracciones como números decimales. (2 puntos cada uno)

a. $\left(\frac{1}{10}\right)^0 + \left(\frac{1}{10}\right)^1 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + ...$

b. $(3^{-2})^{-1} \cdot 10^{-1} + (3^{-2})^{-1} \cdot 10^{-2} + (3^{-2})^{-1} \cdot 10^{-3} + ...$

3. En la siguiente tabla se muestran algunos de los prefijos del Sistema Internacional de Unidades (SI):

Prefijo	nano	micro	mili	centi	deci	deca	hecto	kilo	mega	giga	tera
Símbolo	n	µ	m	c	d	da	h	k	M	G	T
Factor	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}

Para utilizar los prefijos, basta juntarlos con el nombre de la unidad, por ejemplo, nanosegundo (ns), micrometro (µm), decalitro (daL), megawatt (MW), entre otras.

a. ¿Cuál es el valor, en segundos, de 5 nanosegundos (ns)? ¿Y de 0,34 gigasegundos (Gs)? (3 puntos)

Realiza tus cálculos

Respuesta ▸ ______

b. El virus de la gripe mide aproximadamente 0,00000003 m. ¿Es correcto afirmar que el virus de la gripe mide aproximadamente 30 µm? Justifica tu respuesta. (3 puntos)

Realiza tus cálculos

Respuesta ▸ ______

Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
2	Reconocer la potencia de una potencia como multiplicación iterada y el significado de exponentes que pertenecen a $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.		**Logrado:** 10 puntos o más. **Medianamente logrado:** 8 a 9 puntos. **Por lograr:** 7 puntos o menos.
3	Aplicar las propiedades de las potencias.		
1	Modelar procesos de crecimiento y decrecimiento.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Utilizaste la estrategia que planteaste al inicio de este tema? ¿Cuáles otras usaste? Explica.

______

- ¿Has cumplido tus metas iniciales? ¿Qué has hecho para ello? ¿Qué debes mejorar?

______

- Las dificultades que tuviste al inicio, ¿las resolviste en el transcurso del tema? ¿Cuáles otras te surgieron?

______

Actividades complementarias

CADENA DE FAVORES

La película *Cadena de favores* narra el desarrollo de un trabajo escolar en el que un niño (Trevor), a través de un proyecto, genera una cadena de favores: "Al ayudar a una persona de alguna forma, esta debía retribuir ayudando a tres personas más". Así, se establecería una secuencia de favores que harían de la vida algo mejor.

A continuación, estudiaremos la cadena de favores. La notación que usaremos:

H_n: corresponde a la cantidad de personas que hay en el nivel n.
V_n: corresponde a la cantidad total de personas que hay hasta el nivel n.

Analicemos la cantidad de personas en los primeros tres niveles de la cadena.

- **Nivel 0:** 1 (Trevor).
- **Nivel 1:** El triple de personas del nivel 0, es decir, 3 personas.
- **Nivel 2:** El triple de personas del nivel 1, es decir, $3 \cdot 3 = 3^2$, que corresponde a 9 personas.
- **Nivel 3:** El triple de personas del nivel 2, es decir, $3 \cdot 3^2 = 3^3$, que corresponde a 27 personas.

En general, la cantidad de personas del nivel n es 3^n, es decir, $H_n = 3^n$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Determinar el número total de personas hasta el nivel 100 será algo más complicado. Hay que sumar la cantidad de personas de cada nivel, es decir:

$$V_{100} = H_0 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + \ldots + H_{100} = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \ldots + 3^{100}$$

Para sumar 101 términos, considera lo siguiente:

1° $V_{100} = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \ldots + 3^{100}$ → (ecuación 1)

2° $3 \cdot V_{100} = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 3 \cdot 3^5 + \ldots + 3 \cdot 3^{100}$ → Multiplicamos por 3

3° $3 \cdot V_{100} = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + \ldots + 3^{101}$ → (ecuación 2)

Ahora, si restamos la ecuación 2 con la ecuación 1, nos queda:

1° $3 \cdot V_{100} - V_{100} = 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{101} - (1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{100}) = 3^{101} - 1$ → ecuación 2 – ecuación 1

2° $(3 - 1) \cdot V_{100} = 3^{101} - 1$ → Su factor común es V_{100}

3° $V_{100} = \dfrac{3^{101} - 1}{2}$ → Despejamos V_{100}

De forma análoga, es posible obtener la expresión general para el nivel n, $V_n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

En consecuencia, si funcionara la cadena de favores de Trevor solamente hasta 10 niveles, lograría que la vida fuera algo mejor para $V_{10} = \dfrac{3^{11} - 1}{2} = 88\,573$ personas, incluido Trevor.

Responde

1. **Determina las fórmulas para H_n y V_n en el caso de que cada uno deba retribuir a cuatro personas. Compara con tus compañeros y explica cómo lo obtuviste.**

2. **Aplica lo aprendido con la cadena de favores para analizar el crecimiento de una población de bacterias.**

Un cultivo de bacterias se reproduce de la siguiente forma:

- Al inicio del cultivo hay 5 bacterias.
- 1 hora después hay 25 nuevas bacterias.
- 2 horas después hay 125 nuevas bacterias, y cada hora aumenta el quíntuple.

a. ¿Cuántas nuevas bacterias hay después de un día?, ¿después de 2 días?, ¿y después de 10 días?

b. Deduce una fórmula para el crecimiento del cultivo de bacterias para n horas (con $n \in \mathbb{N}$).

¿Qué aprendí? Evaluación final

Desarrolla las siguientes actividades de evaluación que te permitirán reconocer lo que has estudiado en esta unidad.

Operatoria en los números racionales

1. Determina a qué conjunto numérico pertenecen los siguientes números: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$. Recuerda que un número puede pertenecer a más de un conjunto numérico. (0,5 puntos cada uno)

a. $-0,5$ **c.** $\frac{11}{13}$ **e.** $-\frac{21}{25}$

b. $0,\overline{3}$ **d.** -100 **f.** $0,9\overline{881}$

2. Realiza las siguientes operaciones y simplifica si es posible. (1 punto cada uno)

a. $3,04 : \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot 2,75$ **b.** $\frac{1}{2} + 1,\overline{2} - 1,05$ **c.** $3,1 \cdot 0,4 + 1,7 : \frac{6}{5}$

3. Escribe qué propiedades de la adición se cumplen en cada caso y, luego, compruébalas. (1 punto cada uno)

a. $\frac{5}{3} - \frac{2}{5} = \left(-\frac{2}{5}\right) + \frac{5}{3}$ **b.** $\left[\left(-\frac{5}{3}\right) + \frac{7}{4}\right] + \frac{1}{2} = \left(-\frac{5}{3}\right) + \left(\frac{7}{4} + \frac{1}{2}\right)$

4. Completa la tabla según corresponda. Sigue el ejemplo de la primera fila. (1 punto cada uno)

Expresión numérica	Lenguaje natural
$6 \cdot 5 + (-7) : (-2)$	La suma entre el producto de seis y cinco con el cociente entre menos siete y menos dos.
$\left(5 + \frac{1}{3}\right) - (-2) \cdot 7$	
	Un cuarto menos la resta entre diez y menos seis.
$7 : (-8) - \left(-6 + \frac{2}{5}\right)$	

5. Indica las condiciones que deben cumplir los números enteros a, b y c, para que la ecuación $ax + b = c$, $a \neq 0$, cumpla lo pedido en cada caso. (2 puntos cada uno)

a. La solución sea un número entero negativo. **b.** La solución sea un número racional positivo.

6. Resuelve el siguiente problema. (2 puntos)

El submarinismo o buceo es el acto en el cual una persona permanece bajo el agua. Si una persona se sumerge a 25,5 m bajo el nivel del mar y luego desciende $4\frac{1}{3}$ m más, ¿a cuántos metros bajo el nivel del mar se encuentra?

Potencias

7. Usa las propiedades de las potencias para reducir la siguiente expresión: $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{81}{16}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^2 : \left(\frac{8}{27}\right)^3}$. (1 punto)

8. Completa usando algunas de las cuatro operaciones de modo que el resultado de cada una de las expresiones numéricas sea igual a 1. (1 punto cada uno)

a. $4^3 \square\, 2^3 \square\, 2^3$

b. $\left(\frac{4}{5}\right)^2 \square \left(\frac{25}{16}\right)^{-1}$

c. $(-6)^2 \square\, (-6)^4 \square \left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$

d. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \square \left(\frac{1}{6}\right)^{-4} \square\, 4^4 \square\, (-5{,}23)^0$

9. Desarrolla cada potencia y calcula su valor. (1 punto cada uno)

a. $\left(\frac{4^{-4}}{7}\right)^2$

b. $\left[\left(-0{,}02\right)^{-1}\right]^2$

c. $\left[\left(\frac{6}{5}\right)^3\right]^2$

10. Determina si cada afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explícala usando argumentos matemáticos; y si es falsa, muestra un ejemplo que no la cumpla. (1 punto cada uno)

a. La propiedad $\dfrac{a^m}{b^n} = a^{m+n}$, con $a, b \neq 0$, y $a, b, n, m \in \mathbb{Z}$ siempre es verdadera.

b. La propiedad $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$, con $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, y $n \in \mathbb{Z}$ es siempre verdadera.

11. Los lados del cuadrado $ABCD$ miden 4 cm. Los puntos medios P, Q, R, S de los lados se han unido formando un segundo cuadrado. (1 punto cada uno)

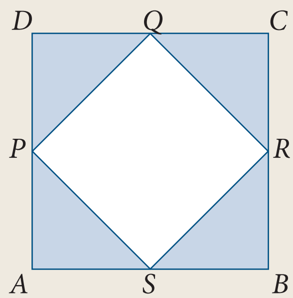
a. Calcula el área de $PSRQ$. Usa el teorema de Pitágoras y recuerda que $(\sqrt{2})^2 = 2$.

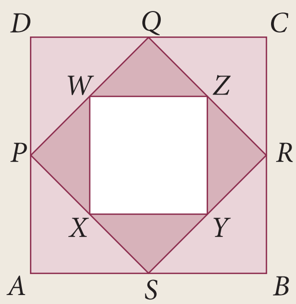
Al unir los puntos medios W, X, Y, Z de los lados del cuadrado $PSRQ$ se forma otro cuadrado.

b. Muestra que las áreas de los cuadrados $ABCD$, $PSRQ$ y $WXYZ$ pueden ser escritas de la forma:

$$16 \text{ cm}^2,\ 16 \cdot \frac{1}{2} \text{ cm}^2,\ 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ cm}^2$$

c. Si el proceso de formar cuadrados más pequeños continúa con las mismas características anteriores, ¿cuál es el área del sexto y décimo cuadrado formado?





¿Qué aprendí? Evaluación final

12. En una laguna de 4 m de profundidad la intensidad de la luz (I) que entra al agua disminuye cada metro el equivalente a $\frac{3}{5}$ de la intensidad anterior. (0,5 puntos cada uno)

a. ¿En qué porcentaje ha disminuido la intensidad a los 4 m?

b. Escribe una expresión, con potencias, para determinar la intensidad de la luz según la profundidad p.

c. En otra laguna, la intensidad de la luz (I) baja cada metro a la mitad del valor anterior. Determina qué parte de la intensidad original hay a los 6 m de profundidad y exprésalo como potencia.

13. Es muy difícil doblar un papel más de 7 veces, haciéndolo siempre en sentido contrario al paso anterior y duplicando su espesor. Supongamos que esto fuera posible y que el espesor del papel es de $\frac{13}{256}$ mm. (0,5 puntos cada uno)

a. ¿Cuál es la potencia que representa el espesor de una hoja doblada 9 veces?

b. ¿Cuántas veces será necesario doblar la hoja para que supere 1 cm de espesor?

c. Formula una expresión para el espesor luego de n dobleces (con $n \in \mathbb{N}$).

14. Lee y responde. (1 punto cada uno)

Andrea y Cristian juegan de la siguiente manera: trazan un segmento de recta de 50 cm; Andrea borra la mitad; Cristian borra la mitad del segmento sin borrar; y así sucesivamente. El juego termina cuando el segmento alcanza una longitud inferior a 1 cm. Vence el jugador que ha hecho la última jugada.

a. ¿Quién es el vencedor de este juego? Justifica tu respuesta.

b. Muestra que, después de la quinta jugada, la longitud del segmento es $50 \cdot 2^{-5}$ cm.

Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1, 2, 3, 4, 5 y 6	Calcular operaciones con números racionales en forma simbólica.		**Logrado:** 21 puntos o más. **Medianamente logrado:** 18 a 20 puntos. **Por lograr:** 17 puntos o menos.
7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14	Realizar operaciones con potencias de base racional y exponente entero. Relacionar el crecimiento o decrecimiento exponencial con potencias de base racional y exponente entero. Resolver problemas de la vida diaria o de otras asignaturas con potencias de base racional y exponente entero.		
	Total		